**Thermodynamische Berechnung der Temperaturverteilung um eine DBHD 1.2 Endlager Beton-Pellets-Säule mit Castor-Wärmeabgabe**

Dr. Gerhard Herres, 27.4 – 22.6.2018 (beim Institut für Energie- und Verfahrenstechnik Thermodynamik und Energietechnik Uni Paderborn / DE)

Für eine senkrechte Säule von LB = 740 m Länge und DB = 23,2 m Durchmesser, die zu Beginn Q0 = 3,5 MW Wärme an die Steinsalz-Umgebung abgibt, wird die Temperaturverteilung berechnet.

Die Säule enthält 405 Castor-Behälter mit hochradioaktivem Müll, die in 45 Ebenen mit jeweils 9 Behältern angeordnet sind. - Dabei umgeben 8 Behälter symmetrisch einen zentralen Behälter.

Alle Castoren sind allseitig 5 Meter in Beton eingeschlossen, welches für eine gleichmäßige Wärmeverteilung in der zylindrischen Einzel-Pellets der Castor-Einlager-Säule sorgt.

Der Beton hat eine Dichte von ρB = 2.100 kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von cB = 880 J/(kg\*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von λB = 1 W/(m\*K).

Die Betonsäule steht in Steinsalz, welches die abgegebene Wärme nahezu vollständig aufnimmt und ableitet. Das Steinsalz hat eine Dichte von ρS = 2.200 kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von cS = 1200 J/(kg\*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von λS = 5,6 W/(m\*K).

Zur Vereinfachung wird die Wärmeabgabe als ein-dimensionales Problem berechnet, mit zylin­drischer Geometrie einer unendlich langen Wärmequelle. Die Randeffekte oben und unten werden hier nicht betrachtet und führen bei genauerer Berechnung zu geringeren Temperatur­steigerungen, da sich die Wärme auch in Zonen ausbreiten kann, die keine zentrale Wärmequelle enthalten.

Die Differentialgleichung der Wärmeausbreitung lautet, mit W0=Q0/(π\*RB²\*LB) als Leistungsdichte der Wärmequelle zu Beginn der Einlagerung.

Die Temperaturleitfähigkeit im Beton beträgt aB=λB/(ρB\*cb). Die Leistungsdichte der Wärmequelle W(t) nimmt mit der Zeit exponentiell ab W(t)=W0\*exp(-b\*t).

Die Differentialgleichung der Temperaturverteilung in der Betonsäule lautet:



Die Lösung der homogenen Gleichung lautet:



Da die Besselfunktion Y(0,r) bei r=0 den Wert –unendlich hat, kann sie für dieses Problem keinen Beitrag zur Lösung leisten. Die Besselfunktionen J(0,r) werden zur speziellen Lösung addiert um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

TB,hom(t,r) =

Die Werte ym sind dabei die Nullstellen der Besselfunktion 1. Art J(0,r). Die Überlagerung der homogenen Lösung mit der speziellen Lösung und die Bestimmung der Koeffizienten Am ist nur erforderlich, wenn auch für kurze Zeiten von wenigen Monaten eine exakte Lösung benötigt wird. Da die Exponentialfunktionen der homogenen Lösungen diese Beiträge sehr schnell abklingen lassen, sind sie schon nach wenigen Jahren vernachlässigbar klein.

Die spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet:

Diese Temperaturfunktion wächst zunächst mit der Zeit nahezu linear an, um später exponentiell abzufallen, da nach einigen hundert Jahren nur noch wenig Zerfallswärme frei wird, und die im Beton gespeicherte Wärme langsam in das umgebende Salz diffundiert.

Eine analoge Temperaturfunktion muss für das Salz gefunden werden, damit an der Berührungs­stelle beider Funktionen die Anschlussbedingungen erfüllt werden können. Wegen der zylin­drischen Geometrie muss die Temperaturfunktion des Salzes einen abfallende Logarithmus­funktion enthalten, die sich aus der Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung ergibt.

Bei der Lösung der homogenen DGL werden die Koeffizienten pn, qn, sn und un der Reihen­entwicklung bestimmt. Es ergeben sich:

 qn = q0  , pn = p0 – n\*q0/b , un = u0 - qo\*Sn , sn = s0 +n/b \* (q0 – u0) – p0 \* Sn + q0/b\*SSn

Mit und .

Auch für die Temperaturfunktion TS(t,r) muss die spezielle mit vielen allgemeinen Lösungen der DGL überlagert werden, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Es zeigt sich aber auch hier, dass die Exponentialfunktionen der allgemeinen Lösungen schnell abklingen so für genügend lange Zeiten nur die spezielle Funktion betrachtet werden muss.

Die Anschlussbedingungen bei r = RB lauten:

1. 2.

Ausgeführt lautet die erste Bedingung:

Da die Gleichungen für alle Zeiten t erfüllt sein müssen, kann man diese Gleichungen aufteilen, auf einen zeitunabhängigen Term und einen zeitabhängigen Term.

1.a

1.b

Die Gleichung des Wärmestroms, der aus der Betonsäule in das Salz über geht lautet:

Auch diese Gleichung muss man zerlegen in den zeitunabhängigen und den zeitabhängigen Anteil.

2.a

2.b

Die dritte Gleichung ist die Energiebilanz.

Die Änderung der inneren Energie UB(t) ergibt sich aus:

Für die innerer Energie im Salz gilt:

Die Summe dieser beiden Beiträge wird wiederum in den zeitunabhängigen und den zeitabhängigen Anteil aufgeteilt und somit ergeben sich zwei weitere Gleichungen zur Bestimmung der 6 Koeffizienten.