

Thermodynamische Berechnung der Temperaturverteilung um eine DBHD 1.2 Endlager Beton-Pellets-Säule mit Castor-Wärmeabgabe

Dr. Gerhard Herres, 27.4 – 22.6.2018 (beim Institut für Energie- und Verfahrenstechnik Thermodynamik und Energietechnik Uni Paderborn / DE)

Für eine senkrechte Säule von $L_B = 740$ m Länge und $D_B = 23,2$ m Durchmesser, die zu Beginn $Q_0 = 3,5$ MW Wärme an die Steinsalz-Umgebung abgibt, wird die Temperaturverteilung berechnet. Die Säule enthält 405 Castor-Behälter mit hochradioaktivem Müll, die in 45 Ebenen mit jeweils 9 Behältern angeordnet sind. - Dabei umgeben 8 Behälter symmetrisch einen zentralen Behälter. Alle Castoren sind allseitig 5 Meter in Beton eingeschlossen, welches für eine gleichmäßige Wärmeverteilung in der zylindrischen Einzel-Pellets der Castor-Einlager-Säule sorgt. Der Beton hat eine Dichte von $\rho_B = 2.100$ kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von $c_B = 880$ J/(kg*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_B = 1$ W/(m*K). Die Betonsäule steht in Steinsalz, welches die abgegebene Wärme nahezu vollständig aufnimmt und ableitet. Das Steinsalz hat eine Dichte von $\rho_S = 2.200$ kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von $c_S = 1200$ J/(kg*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_S = 5,6$ W/(m*K).

Zur Vereinfachung wird die Wärmeabgabe als ein-dimensionales Problem berechnet, mit zylindrischer Geometrie einer unendlich langen Wärmequelle. Die Randeffekte oben und unten werden hier nicht betrachtet und führen bei genauerer Berechnung zu geringeren Temperatursteigerungen, da sich die Wärme auch in Zonen ausbreiten kann, die keine zentrale Wärmequelle enthalten.

Die Differentialgleichung der Wärmeausbreitung lautet, mit $W_0 = Q_0 / (\pi * R_B^2 * L_B)$ als Leistungsdichte der Wärmequelle zu Beginn der Einlagerung.

Die Temperaturleitfähigkeit im Beton beträgt $a_B = \lambda_B / (\rho_B * c_B)$. Die Leistungsdichte der Wärmequelle $W(t)$ nimmt mit der Zeit exponentiell ab $W(t) = W_0 * \exp(-b*t)$.

Die Differentialgleichung der Temperaturverteilung in der Betonsäule lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} T_B(r, t) = a_B \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} T_B(r, t) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} T_B(r, t)}{r} \right) + \frac{Q_0}{\pi R_B^2 L_B e^{b t} \rho_B c_B}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$T_B(r, t) = -C_3 e^{a_B - c_1 t} - C_1 \text{BesselJ}(0, \sqrt{-c_1} r) + -C_3 e^{a_B - c_1 t} - C_2 \text{BesselY}(0, \sqrt{-c_1} r)$$

Da die Besselfunktion $Y(0,r)$ bei $r=0$ den Wert $-\infty$ hat, kann sie für dieses Problem keinen Beitrag zur Lösung leisten. Die Besselfunktionen $J(0,r)$ werden zur speziellen Lösung addiert um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

$$T_{B, \text{hom}}(t, r) = \sum_{m=1}^M A_m e^{-\frac{a_B t y_m^2}{R_B^2}} \text{BesselJ}\left(0, \frac{r y_m}{R_B}\right)$$

Die Werte y_m sind dabei die Nullstellen der Besselfunktion 1. Art $J(0,r)$. Die Überlagerung der homogenen Lösung mit der speziellen Lösung und die Bestimmung der Koeffizienten A_m ist nur erforderlich, wenn auch für kurze Zeiten von wenigen Monaten eine exakte Lösung benötigt wird. Da die Exponentialfunktionen der homogenen Lösungen diese Beiträge sehr schnell abklingen lassen, sind sie schon nach wenigen Jahren vernachlässigbar klein.

Die spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$$T_{B,spez}(t, r) = \left\{ \frac{-\dot{Q}_0}{\pi R_B^2 \cdot L_B \cdot b \cdot \rho_B \cdot c_B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot r^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) \right\} \cdot e^{-b \cdot t} + C_0$$

Diese Temperaturfunktion wächst zunächst mit der Zeit nahezu linear an, um später exponentiell abzufallen, da nach einigen hundert Jahren nur noch wenig Zerfallswärme frei wird, und die im Beton gespeicherte Wärme langsam in das umgebende Salz diffundiert.

Eine analoge Temperaturfunktion muss für das Salz gefunden werden, damit an der Berührungsstelle beider Funktionen die Anschlussbedingungen erfüllt werden können. Wegen der zylindrischen Geometrie muss die Temperaturfunktion des Salzes eine abfallende Logarithmusfunktion enthalten, die sich aus der Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung ergibt.

$$T_{S,spez}(t, r) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot r^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot [\ln(r) \cdot (p_n + q_n \cdot t) + (s_n + u_n \cdot t)] \right\} \cdot e^{-b \cdot t} + C_0$$

Bei der Lösung der homogenen DGL werden die Koeffizienten p_n , q_n , s_n und u_n der Reihenentwicklung bestimmt. Es ergeben sich:

$$q_n = q_0 \quad , \quad p_n = p_0 - n \cdot q_0 / b \quad , \quad u_n = u_0 - q_0 \cdot S_n \quad , \quad s_n = s_0 + n/b \cdot (q_0 - u_0) - p_0 \cdot S_n + q_0/b \cdot SS_n$$

Mit $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ und $SS_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$.

Auch für die Temperaturfunktion $T_S(t, r)$ muss die spezielle mit vielen allgemeinen Lösungen der DGL überlagert werden, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Es zeigt sich aber auch hier, dass die Exponentialfunktionen der allgemeinen Lösungen schnell abklingen so für genügend lange Zeiten nur die spezielle Funktion betrachtet werden muss.

Die Anschlussbedingungen bei $r = R_B$ lauten:

$$1. \quad T_B(t, R_B) = T_S(t, R_B) \quad 2. \quad \dot{Q}_B(t, R_B) = \dot{Q}_S(t, R_B)$$

Ausgeführt lautet die erste Bedingung:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) \right] + \frac{-\dot{Q}_0}{\pi R_B^2 \cdot L_B \cdot b \cdot \rho_B \cdot c_B} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot [\ln(R_B) \cdot (p_n + q_n \cdot t) + (s_n + u_n \cdot t)] \end{aligned}$$

Da die Gleichungen für alle Zeiten t erfüllt sein müssen, kann man diese Gleichungen aufteilen, auf einen zeitunabhängigen Term und einen zeitabhängigen Term.

$$1.a \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} \right) \right] + \frac{-\dot{Q}_0}{\pi R_B^2 \cdot L_B \cdot b \cdot \rho_B \cdot c_B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot [\ln(R_B) \cdot p_n + s_n]$$

$$1.b \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot g_0 \right] \cdot t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot [\ln(R_B) \cdot q_n + u_n] \cdot t$$

Die Gleichung des Wärmestroms, der aus der Betonsäule in das Salz über geht lautet:

$$\dot{Q}_B(t, r) = -\lambda_B 2\pi R_B L_B \cdot \left(\frac{\partial T_B}{\partial r} \right)_{r=R_B} = \dot{Q}_S(t, r) = -\lambda_S 2\pi R_B L_B \cdot \left(\frac{\partial T_S}{\partial r} \right)_{r=R_B}$$

$$\lambda_B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot \frac{1}{R_B} \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) = \lambda_S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot \frac{1}{R_B} \cdot [\ln(R_B) \cdot (p_n + q_n \cdot t) + (s_n + u_n \cdot t)]$$

Auch diese Gleichung muss man zerlegen in den zeitunabhängigen und den zeitabhängigen Anteil.

$$2.a \quad \lambda_B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot \frac{1}{R_B} \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} \right) = \lambda_S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot \frac{1}{R_B} \cdot [\ln(R_B) \cdot p_n + s_n]$$

$$2.b \quad \lambda_B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \cdot \frac{g_0 \cdot t}{R_B} = \lambda_S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \cdot \frac{1}{R_B} \cdot [\ln(R_B) \cdot q_n + u_n] \cdot t$$

Die dritte Gleichung ist die Energiebilanz.

$$\Delta U_B(t) + \Delta U_S(t) = \int_0^t \dot{Q}(t) dt = \int_0^t \dot{Q}_0 e^{-bt} dt = \dot{Q}_0 / b \cdot (1 - e^{-bt})$$

Die Änderung der inneren Energie $\Delta U_B(t)$ ergibt sich aus:

$$\Delta U_B(t) = \int_0^{R_B} T_B(t, r) \cdot \rho_B c_B L_B 2\pi r dr = \rho_B c_B L_B \pi$$

$$\cdot e^{-bt} \left\{ \frac{-\dot{Q}_0 \cdot R_B^2}{\pi R_B^2 \cdot L_B \cdot b \cdot \rho_B \cdot c_B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \frac{R_B^2}{2n+2} \cdot \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) \right\}$$

$$- \rho_B c_B L_B \pi \left\{ \frac{-\dot{Q}_0 \cdot R_B^2}{\pi R_B^2 \cdot L_B \cdot b \cdot \rho_B \cdot c_B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \frac{R_B^2}{2n+2} \cdot \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} \right) \right\}$$

Für die innerer Energie im Salz gilt:

$$\Delta U_{BS}(t) = \int_{R_B}^{\infty} T_S(t, r) \cdot \rho_S c_S L_B 2\pi r dr = \rho_S c_S L_B 2\pi \cdot e^{-bt}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot r^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \frac{r^2}{2(n+1)} \cdot \left[\left(\ln(r) - \frac{1}{2(n+1)} \right) \cdot (p_n + q_n \cdot t) + (s_n + u_n \cdot t) \right] \right\}$$

$$- \rho_S c_S L_B 2\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left(\frac{-b \cdot r^2}{4 \cdot a_S} \right)^n \frac{r^2}{2(n+1)} \cdot \left[\left(\ln(r) - \frac{1}{2(n+1)} \right) \cdot p_n + s_n \right] \right\} \Bigg|_{R_B}^{\infty}$$

Die Summe dieser beiden Beiträge wird wiederum in den zeitunabhängigen und den zeitabhängigen Anteil aufgeteilt und somit ergeben sich zwei weitere Gleichungen zur Bestimmung der 6 Koeffizienten.