

Näherungsweise Entwicklung der Temperaturverteilung um eine Säule mit Wärmeabgabe

Gerhard Herres, 27.4.2018 – 8.8.2018

Für eine senkrechte Säule von $L_B = 740$ m Länge und $D_B = 23,3$ m Durchmesser, in der zu Beginn $Q_0 = 3,1$ MW Wärme freigesetzt werden, wird die Temperaturverteilung abgeschätzt. Die Säule enthält 360 Castor-Behälter mit hochradioaktivem Müll, die in 45 Ebenen mit jeweils 8 Behältern angeordnet sind. Dabei stehen 8 Behälter symmetrisch im Kreis.

Alle Castoren sind in Beton eingeschlossen, welches für eine gleichmäßige Wärmeverteilung in der zylindrischen Säule sorgt. Der Beton hat eine Dichte von $\rho_B = 2100$ kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von $c_B = 880$ J/(kg*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_B = 1$ W/(m*K).

Die Betonsäule steht in Steinsalz, welches die abgegebene Wärme nahezu vollständig aufnimmt und ableitet. Das Steinsalz hat eine Dichte von $\rho_S = 2200$ kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von $c_S = 1200$ J/(kg*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_S = 5,6$ W/(m*K).

Zur Vereinfachung wird die Wärmeabgabe als ein-dimensionales Problem berechnet mit zylindrischer Geometrie einer unendlich langen Wärmequelle. Die Randeffekte oben und unten werden hier nicht betrachtet und führen bei genauerer Berechnung zu geringeren Temperatursteigerungen, da sich die Wärme auch in Zonen ausbreiten kann, die keine zentrale Wärmequelle enthalten.

Die Differentialgleichung der Wärmeausbreitung lautet, mit $\dot{W}_0 = \dot{Q}_0 / (\pi \cdot R_B^2 \cdot L_B)$ als Leistungsdichte der Wärmequelle zu Beginn der Einlagerung.

Die Temperaturleitfähigkeit im Beton beträgt $a_B = \lambda_B / (\rho_B \cdot c_B)$. Unter der Annahme, dass die Castoren alle innerhalb kurzer Zeit eingelagert werden, nimmt die Leistungsdichte der Wärmequelle $W(t)$ mit der Zeit exponentiell ab: $\dot{W}(t) = \dot{W}_0 \cdot \exp(-b \cdot t)$. Mit $b = 4,588498491647 \cdot 10^{-10}$ 1/s.

Die Differentialgleichung der Temperaturverteilung in der Betonsäule lautet:

$$\frac{\partial T_B(r, t)}{\partial t} = a_B \left(\frac{\partial^2 T_B(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_B(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{\dot{W}_0}{\rho_B c_B} \cdot e^{-bt} \quad 1$$

Sucht man eine Lösung der homogenen DGL, so gibt es zwei Wege. Der erste Weg trennt die DGL durch Separation der Variablen, durch einen Produktansatz für die Temperaturfunktion. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet dann:

$$T_{B,hom}(r, t) = C_1 \exp\left(\frac{-a_B \cdot y_m^2 \cdot t}{R_B^2}\right) J\left(0, \frac{r}{R_B} y_m\right) + C_2 \exp\left(\frac{-a_B \cdot y_m^2 \cdot t}{R_B^2}\right) Y\left(0, \frac{r}{R_B} y_m\right) \quad 2$$

Behandelt man die gesamte Betonsäule als homogene Wärmequelle, so kann die Besselfunktion 2. Art $Y(0, r)$, die bei $r = 0$ den Wert $-\infty$ hat, für dieses Problem keinen Beitrag zur Lösung leisten. Die Besselfunktionen $J(0, r)$ werden zur speziellen Lösung addiert, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

$$T_{B,hom}(r, t) = \sum_{m=1}^M C_m \exp\left(\frac{-a_B \cdot y_m^2 \cdot t}{R_B^2}\right) J\left(0, \frac{r}{R_B} y_m\right) \quad 3$$

Die Werte y_m sind dabei die Nullstellen der Besselfunktion 1. Art $J(0, r)$. Die Überlagerung der homogenen Lösung mit der speziellen Lösung und die Bestimmung der Koeffizienten C_m

ist nur erforderlich, wenn auch für kurze Zeiten von wenigen Monaten eine exakte Lösung benötigt wird. Da die Exponentialfunktionen der homogenen Lösungen diese Beiträge sehr schnell abklingen lassen, sind sie schon nach wenigen Jahren vernachlässigbar klein.

$$a_B \cdot \frac{y_1^2}{R_B^2} = \frac{5,6 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{2200 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 1200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})} \cdot \frac{2,404825558^2}{11,6^2 \text{ m}^2} = 9,11665 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} = \frac{1}{127 \text{ d}}$$

Nach $3 \cdot 127 \text{ d} = 381$ Tagen ist der Einfluss des ersten Terms nur noch knapp 5%, nach 2 Jahren nur noch 0,3% des Beitrag bei $t = 0$. Die folgenden Terme für $m > 1$ klingen noch schneller ab, da die Nullstellen bei $y_2 = 5,520078110$, $y_3 = 8,653727913$, usw. liegen.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$$T_{B,\text{spez}}(r, t) = \left\{ \frac{-\dot{W}_0}{b \cdot \rho_B c_B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot r^2}{4a_B} \right)^n \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) \right\} \cdot e^{-b \cdot t} + C_B \quad 4$$

Diese Temperaturfunktion wächst zunächst mit der Zeit nahezu linear an, um später exponentiell abzufallen, da nach einigen hundert Jahren nur noch wenig Zerfallswärme frei wird und die im Beton gespeicherte Wärme langsam in das umgebende Salz diffundiert. Eine zweite Temperaturfunktion muss für das Salz gefunden werden. An der Berührungsstelle beider Funktionen müssen die Anschlussbedingungen, Temperaturgleichheit und Gleichheit der Wärmeströme, erfüllt werden. Wegen der zylindrischen Geometrie muss die Temperaturfunktion des Salzes eine mit dem Radius abfallende Funktion enthalten. Hier kommt die zweite Methode zur Lösung partieller DGL's zum Einsatz, denn die Besselfunktionen 1. und 2. Art haben immer die Eigenschaft, dass sie mit größer werdendem Radius Schwingungen zeigen. Die zweite Methode basiert auf einem allgemeinen Reihenansatz in Potenzen von r mit Temperatur abhängigen Koeffizienten

$$T_{S,\text{hom}}(r, t) = \left\{ a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! n} \left(\frac{-r^2}{4a_S \cdot t} \right)^n \right\} + C_S \quad 5$$

Die Anschlussbedingungen bei $r = R_B$ lauten:

$$1. \quad T_B(R_B, t) = T_S(R_B, t) \quad 2. \quad \dot{Q}_B(R_B, t) = \dot{Q}_S(R_B, t)$$

Ausgeführt lautet die erste Bedingung:

$$\left\{ \frac{-\dot{W}_0}{b \cdot \rho_B c_B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{-b \cdot r^2}{4a_B} \right)^n \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) \right\} \cdot e^{-b \cdot t} + C_B = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n} \left(\frac{-R_B^2}{4 \cdot a_S \cdot t} \right)^n + C_S$$

Die Gleichung des Wärmestroms, der aus der Betonsäule in das Salz übergeht, lautet:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_B(t, r) &= -\lambda_B 2\pi R_B L_B \cdot \left(\frac{\partial T_B}{\partial r} \right)_{r=R_B} = \dot{Q}_S(t, r) = -\lambda_S 2\pi R_B L_B \cdot \left(\frac{\partial T_S}{\partial r} \right)_{r=R_B} \\ -\lambda_B 2\pi R_B L_B \left\{ \frac{-\dot{W}_0}{b \cdot \rho_B c_B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n! \cdot n! \cdot R_B} \left(\frac{-b \cdot R_B^2}{4 \cdot a_B} \right)^n \left(f_0 - n \frac{g_0}{b} + g_0 \cdot t \right) \right\} \cdot e^{-b \cdot t} &= \\ -\lambda_S \cdot 2\pi \cdot R_B L_B \cdot a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n! \cdot n \cdot R_B} \left(\frac{-R_B^2}{4 \cdot a_S \cdot t} \right)^n & \end{aligned}$$

Man sieht an diesen Gleichungen, dass eine einfache Gleichsetzung nicht gelingen kann, denn die Zeitabhängigkeit ist zu unterschiedlich. Ein Ansatz aus dem Lehrbuch Wärme- und Stoffübertragung von Hans-Dieter Baehr und Karl Stephan führt aber weiter. Dort wird für eine Linienquelle mit einem analogen Funktionalansatz gerechnet, der die Diffusionsgleichung für eine zeitlich konstante Wärmequelle erfüllt. Für den Fall einer zeitlich veränderlichen Quellstärke wird eine Integration dieser Funktion über das Zeitintervall $0 \leq \tau \leq t$ erzeugt [Kap. 2.3.7.2 Punkt- und linienförmige Wärmequellen, S.207ff, 7. Aufl.].

Für eine zum Zeitpunkt $t=0$ freigesetzte Wärmemenge Q_0 :

$$\vartheta(r, t) = \frac{Q_0/L}{4\pi\lambda t} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \quad 6$$

Für zeitliche veränderliche Quellstärke:

$$\vartheta(r, t) = \frac{1}{4\pi\lambda L} \cdot \int_{\tau=0}^{\tau=t} \dot{Q}_0(t) \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{t-\tau} \quad 7$$

Nimmt man vereinfachend an, dass der größte Teil der Wärme, die innerhalb einiger Jahrzehnte freigesetzt wird, in das Salz diffundiert, so kann man die im Beton verbleibende Wärmemenge vernachlässigen und als Zeitfunktion $\dot{Q}(t) = \dot{Q}_0 \cdot \exp(-b \cdot t)$ einsetzen. Damit macht man zwei Fehler. Erstens nimmt man eine zu große Wärmemenge an, die auch zweitens zu schnell in das Salz eindringt, denn die Wärmeleitfähigkeit des Betons ist geringer als diejenige des Salzes, so dass die resultierenden Temperaturen in Wirklichkeit geringer und später eintreten werden. Mit dieser Vorgehensweise erhält man also höhere Temperaturen, aus denen dann auch größere Volumenzunahmen folgen. Die Bodenhebungen dürften in Wirklichkeit also geringer ausfallen, als die folgenden Berechnungen ergeben.

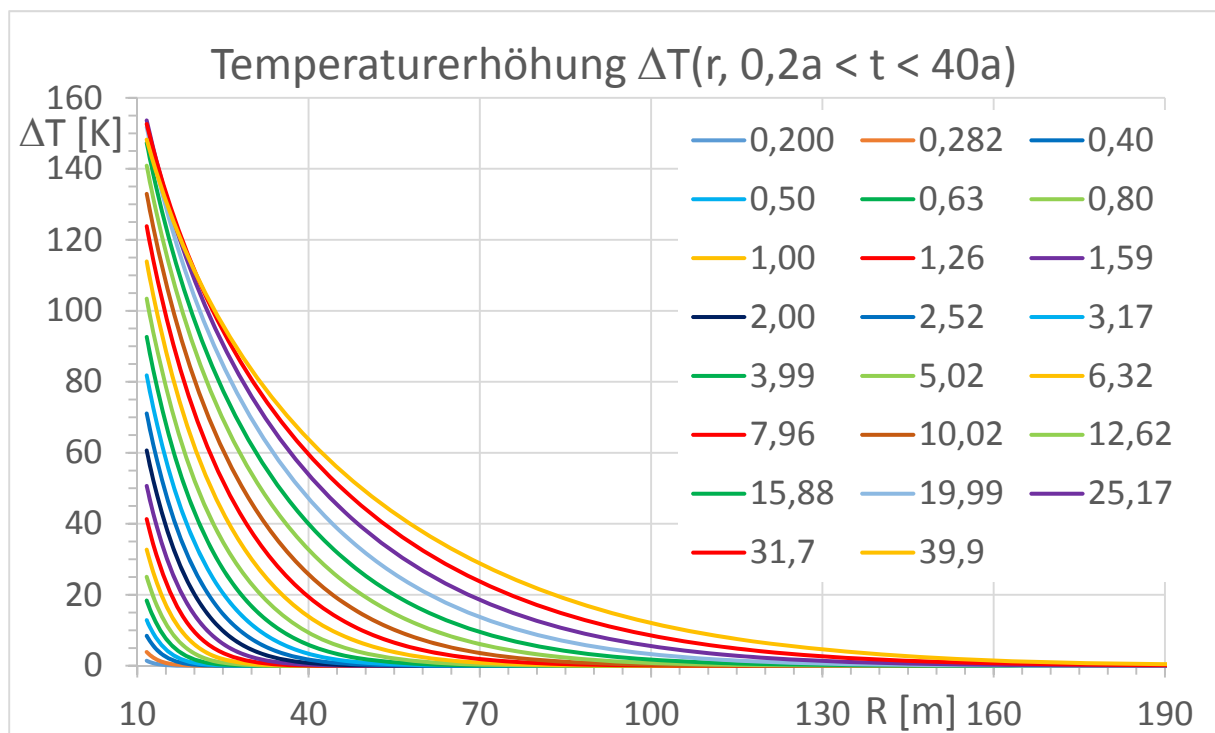


Abbildung 1: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für $t < 40$ Jahre

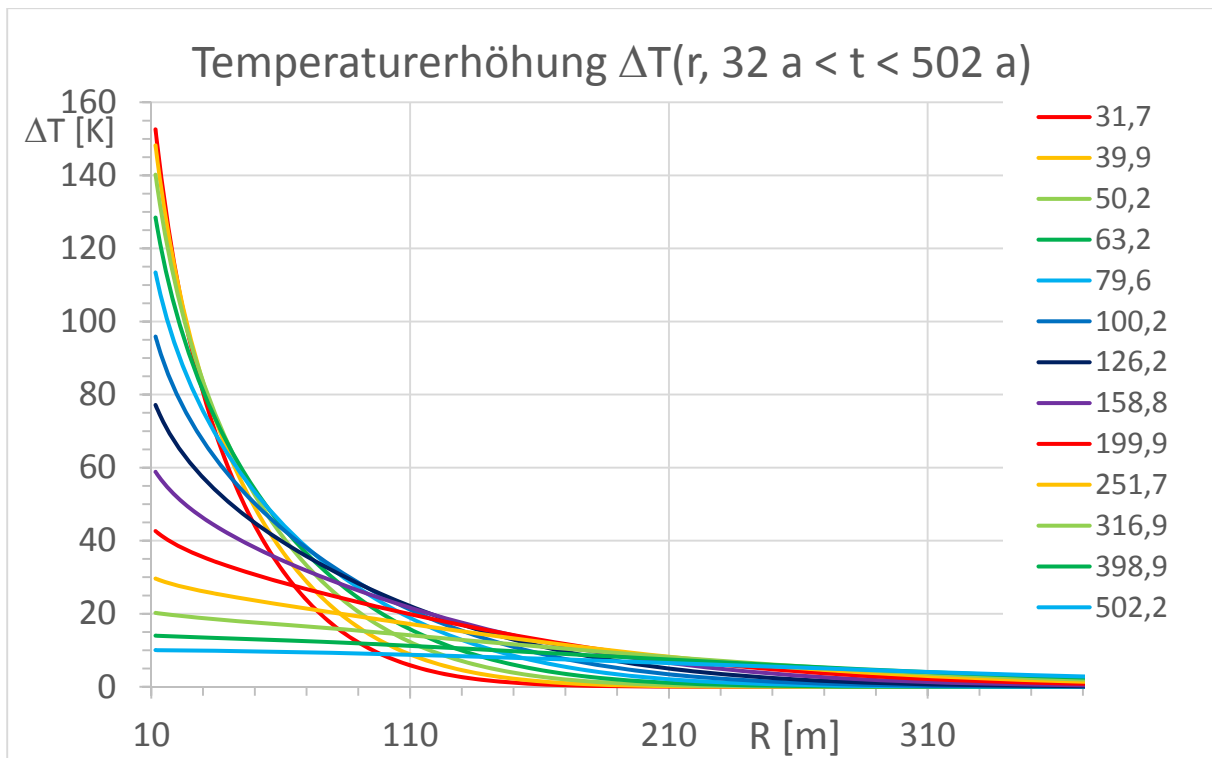


Abbildung 2: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für $32 \text{ a} < t < 502 \text{ a}$

Bis ungefähr 40 Jahre nach Beginn der Einlagerung steigt die Temperatur im Salz direkt an der Grenze zur Betonsäule an, danach fällt sie wieder, weil die Wärme im Salz schneller weiter geleitet wird, als neue Nachzerfallswärme aus dem Inneren nach kommt. Diese Näherung macht allerdings zwei Fehler. Erstens behandelt sie die Betonsäule mit der gleichen hohen Wärmeleitfähigkeit wie das Salz und auch die Dichte und spez. Wärmekapazität werden gleichgesetzt, zusammengefasst in der Temperaturleitfähigkeit $a = \lambda/\rho c$. Dadurch kommt die Wärme schneller zum Salz als in der Realität. Zweitens wird nicht berücksichtigt, dass sich die Wärmequelle nicht im Zentrum der Säule, sondern in einem Ring zwischen $3,98 \text{ m} < r < 6,78 \text{ m}$ befindet. Der Abstand von der Wärmequelle zur Grenze Beton/Salz ist also nur halb so weit wie in der Rechnung, dafür wird zu Beginn ein Teil der Wärme ins Zentrum fließen und erst später nach außen zum Salz. Außerdem sind die Castoren nur etwa $6,06 \text{ m}$ lang und stehen in einem vertikalen Abstand von $16,46 \text{ m}$. Die Wärme wird also nur auf 37% der Höhe freigesetzt und so ist die wirkliche Wärmestromdichte lokal etwa 2,7 mal so hoch. Im Beton verteilt sich die Wärme dann radial und axial jeweils etwa 5 m bis zur Grenze zum Salz bzw. zur Trennfuge. Lokal kann deshalb die Temperaturerhöhung etwa größer sein, als mit diesem Verfahren berechnet. Das wird aber ausgeglichen durch die Zonen, die kühler sind in Höhe der Trennfuge. Dieser lokale Unterschied ist auch zeitlich begrenzt, denn schon 50 Jahre nach Beginn der Einlagerung ist selbst die Temperaturerhöhung an der Grenze Beton/Salz unter 140 K gesunken, wie aus Abbildung 3 zu erkennen ist. 50 Jahre später ist die höchste Temperatur um weitere 40 K gesunken. Die Rechnung geht von der Vorstellung aus, dass alle 360 Castoren innerhalb sehr kurzer Zeit eingelagert werden, so dass ab dem Zeitpunkt 0 die Nachzerfallswärme von $3,1 \text{ MW}$ in Beton und Salz fließen. Das ist aber technisch nicht machbar, denn die Absenkung von 8 Castoren und die Auffüllung mit Beton und dessen Aushärtung benötigen schätzungsweise 4 bis 6 Wochen pro Ebene. So sind also mindestens 5 Jahre nötig, die gesamte Betonsäule zu erstellen. Beginnt man mit schon länger gelagerten Castoren, so ist deren Nachzerfallswärme geringer und die folgende Temperaturerhöhung ebenfalls.

Nicht berücksichtigt ist auch, dass zur Erstellung der Bohrung das Gestein und das Salz gekühlt werden müssen, denn in 3000 m Tiefe liegen Gesteinstemperaturen von 100°C vor, bei denen Gerät und Mannschaft sicher nicht erfolgreich arbeiten können. Das gekühlte Salz wird später die Abbindungswärme des Betons und einen Teil der Nachzerfallswärme aufnehmen.

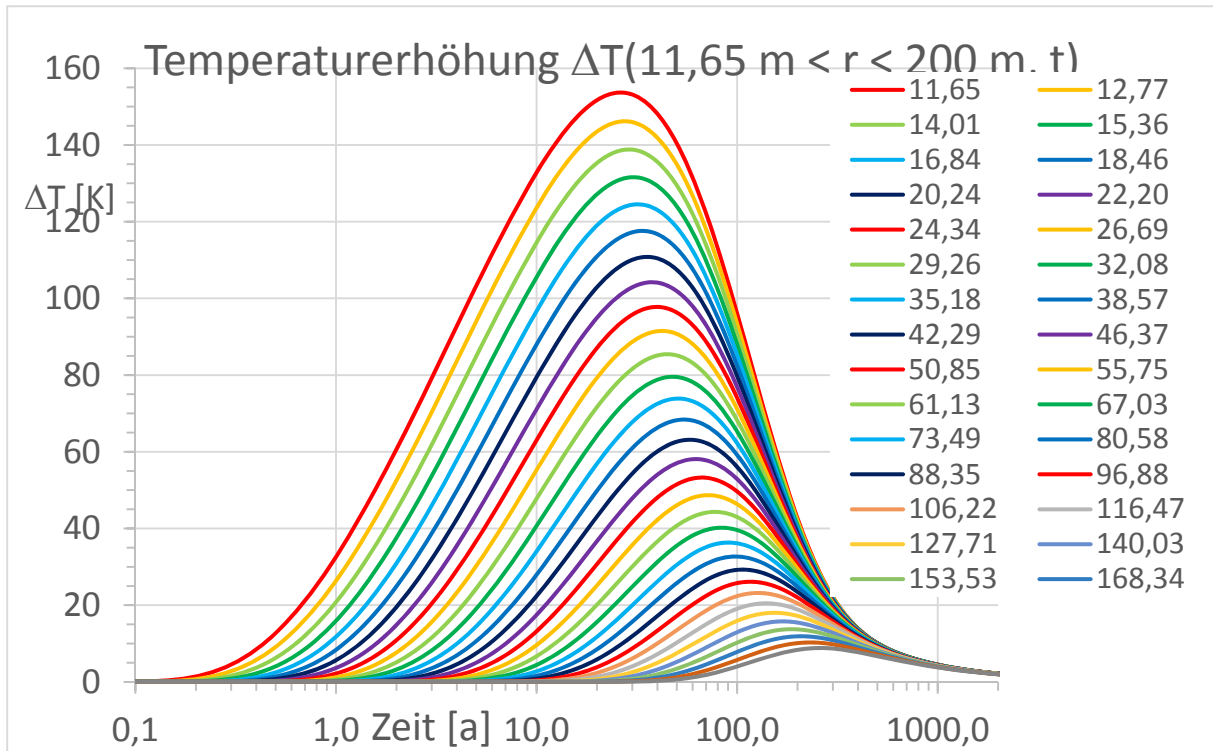


Abbildung 3: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für $r < 202 \text{ m}$

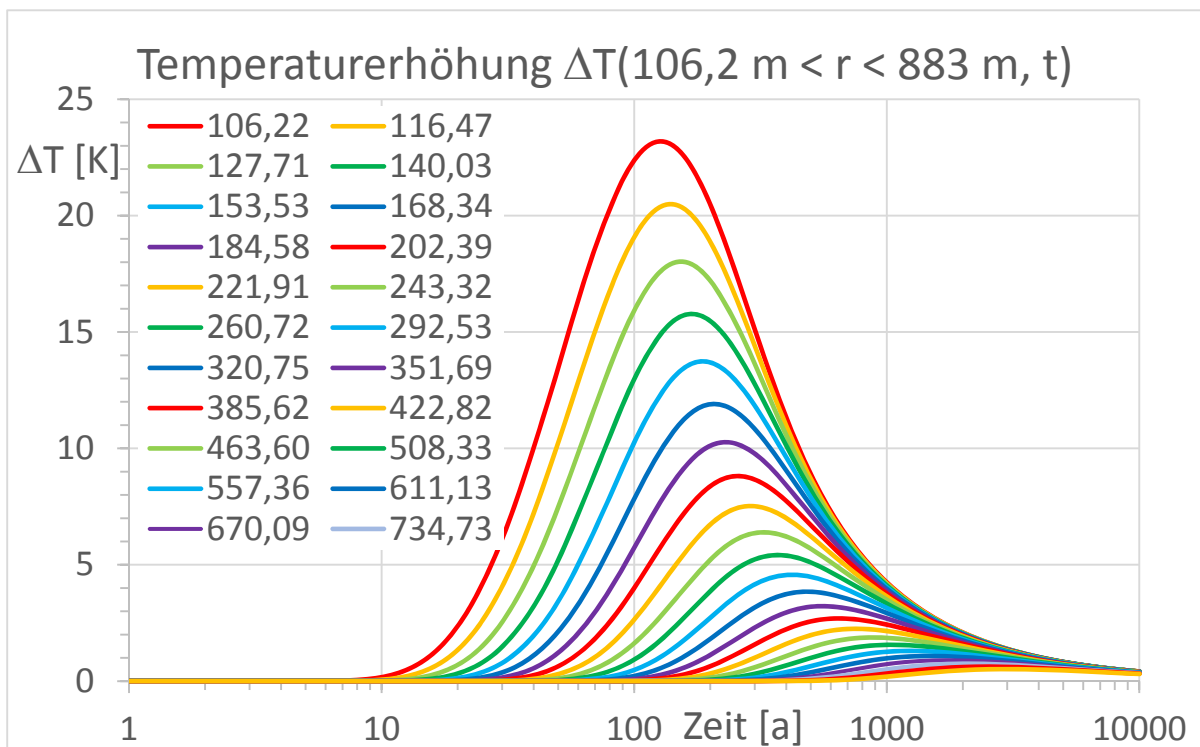


Abbildung 4: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für $R < 884 \text{ m}$.

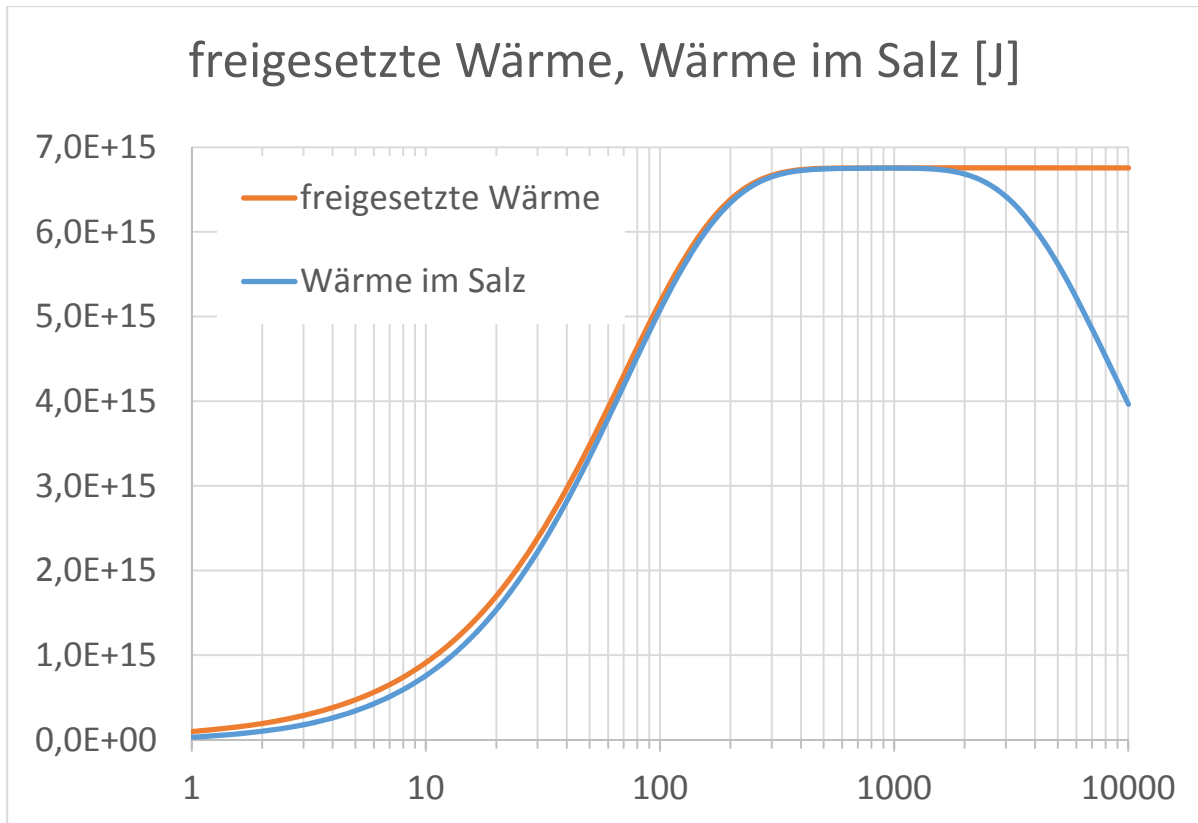


Abbildung 5: Freigesetzte Wärme in Abhängigkeit von der Zeit im Salz.

In Abbildung 5 ist zu sehen, wie viel von der freigesetzten Wärme bis zum Zeitpunkt t schon im Steinsalz zu finden ist. Zu Beginn ist noch ein beträchtlicher Anteil in der Betonsäule. Nach etwa 100 Jahren ist in der direkten Umgebung des Betons die Temperatur schon wieder gesunken und der größte Teil der Wärme in weitem Abstand vom Zentrum. Nach etwa 400 Jahren kommt nur noch wenig Nachzerfallswärme dazu und das Maximum ist fast erreicht, gekennzeichnet durch die horizontale orange Linie. Der Abfall der blauen Linie zeigt nur die Grenze der Berechnung bei $R = 1500$ m. Nach mehr als 1200 Jahren ist ein immer größerer Anteil der Wärme in den Außenbereich $R > 1500$ m vorgedrungen und wird bei der Summe nicht mehr erfasst. Die maximale Wärmemenge ergibt sich durch die Integration

$$Q_{max} = \int_0^{\infty} \dot{Q}_0 \cdot e^{-b \cdot t} dt = \frac{3,1MW}{-b} \cdot (e^{-b \cdot \infty} - 1) = \frac{3,1MW \cdot s}{4,588498491647 \cdot 10^{-10}} = 6,756PJ$$

In der Schrift VIRTUS, Virtuelles Untertagelabor im Steinsalz, S.68, ist eine Funktion für die lineare thermische Ausdehnung des Salzes zu finden.

$$\alpha = 3,025 \cdot 10^{-5} + 2,942 \cdot 10^{-8} \cdot T - 2,5677 \cdot 10^{-12} \cdot T^2 \quad 8$$

Die Einheit der Temperatur ist in der Quelle nicht angegeben. Ich setze die Temperatur in Kelvin ein. Die Volumenausdehnung ist die dritte Potenz dieser Funktion. Die resultierende Volumenzunahme wird auf die Anfangstemperatur $T=100^\circ\text{C} = 373,15\text{K}$ in 3000 m Tiefe bezogen.

$$\Delta V = V \cdot (1,00000 + 1,51086 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta T + 8,62061 \cdot 10^{-8} \cdot \Delta T^2) \quad 9$$

Da die Funktion der linearen thermischen Ausdehnung etwa linear mit der Temperatur anwächst, ist die relative Ausdehnung umso größer, je heißer die Anfangstemperatur ist. Die mit der Funktion 9 approximierte Volumenausdehnung ist also für den Kopf der Betonsäule zu groß, da dort die Temperatur des Steinsalzes ursprünglich um $0,74 \cdot 30 \text{ K} = 22,2 \text{ K}$ geringer ist als am Fuß der Säule.

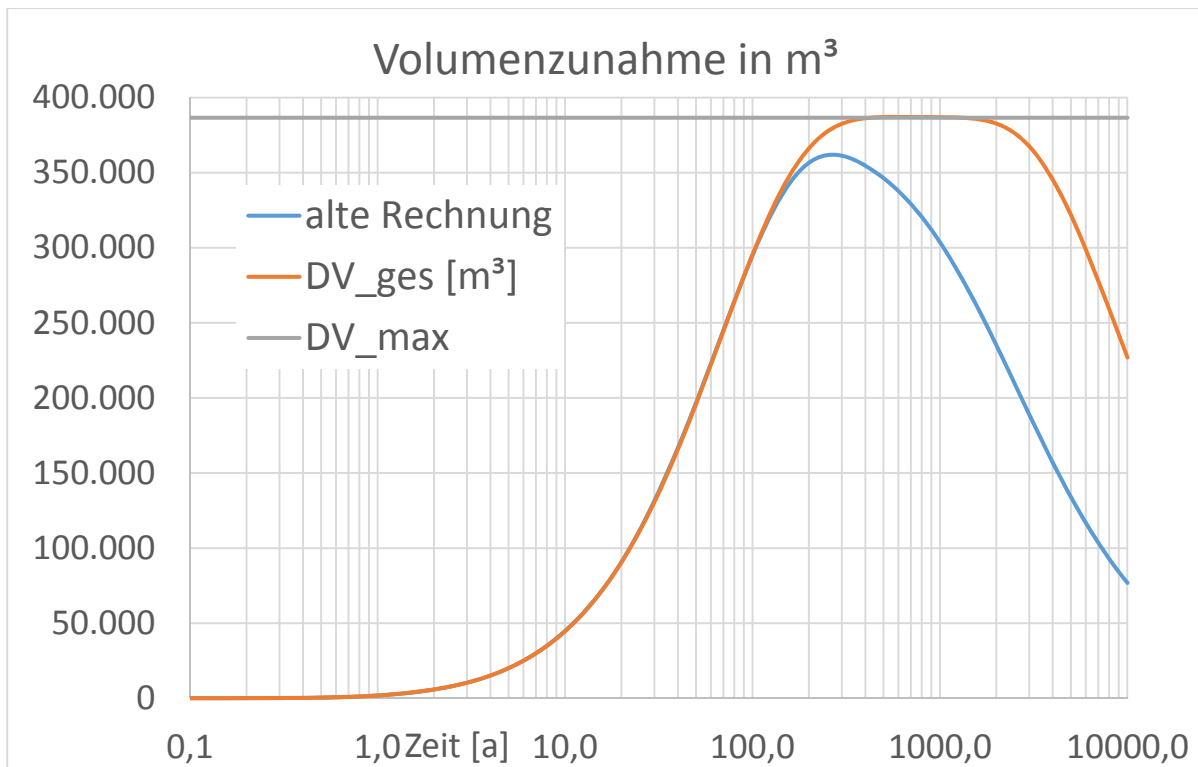


Abbildung 6: Volumenzunahme des Salzes in Abhängigkeit von der Zeit.

Die maximale Volumenzunahme ergibt sich aus der Temperaturerhöhung im Salz nach langer Zeit

$$\Delta V = V \cdot 1,51086 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta T = \frac{Q_{max}}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} \cdot 1,51086 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta T = 386.644 \text{ m}^3$$

Diese Volumenzunahme ist in Abbildung 6 als graue Linie zu sehen. Die orange Linie stellt die Summe aller Volumenzunahmen dar, summiert über konzentrische Zylinderschalen der Länge 740 m bis zum Radius $R = 1500 \text{ m}$, die blaue Linie summierte nur bis $R = 800 \text{ m}$. Da mit zunehmender Zeit immer mehr Wärme in weiter außen liegenden Zylinderschalen zu finden ist, ist dort auch die Volumenzunahme, die bei der Summierung nicht erfasst wird.

Da zuerst die Salzschrift nahe an der Betonsäule warm wird, wird dort auch die Duktilität des Salzes zuerst erhöht. Die spätere Erwärmung entfernter Schichten um den zentralen Zylinder kann deshalb leichter zur Mitte hin ausweichen. Ich nutze deshalb als Modell für die Volumenausdehnung des Salzes die Vorstellung, dass sich der größte Teil der Volumenzunahme nahe der zentralen Betonsäule ergibt. Am Kopf der Betonsäule quillt dann das zusätzliche Salzvolumen nach oben und verschiebt eine gedachte Halbkugel, die bis zur Erdoberfläche reicht, nach außen. Das Zentrum dieser Kugel liegt $H = 2646 \text{ m}$ unter der Erdoberfläche. Ein Kugelabschnitt einer Kugel mit dem Radius $R = H + h$ hat den Radius $a = \sqrt[2]{h \cdot (2 \cdot R - h)}$, die Höhe h und das Volumen $V = \pi h^2 \cdot (R - h/3)$. Nun ist es nötig eine kubische Gleichung zu lösen, die h als Funktion des zusätzlichen Volumens bestimmt.

$$h^3 + \frac{3}{2} H h^2 - \frac{3V}{2\pi} = 0$$

Mit der Substitution $h = y - H/2$ ergibt sich $y^3 - \frac{3}{4} H^2 \cdot y + \frac{1}{4} H^3 - \frac{3}{2\pi} V = 0$

Die Theorie der Lösung kubischer Gleichungen (Cardano) setzt

$$p = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}H\right)^2 = -\frac{3}{4}H^2 \quad \text{und} \quad q = \frac{2}{27}\left(\frac{3}{2}H\right)^3 - \frac{3}{2\pi}V = \frac{1}{4}H^3 - \frac{3}{2\pi}V.$$

$$\text{Daraus wird } \rho = \sqrt[2]{-p^3/27} = \frac{H^3}{8} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2\rho} = \frac{6V}{\pi H^3} - 1.$$

Die drei reellen Lösungen ergeben sich zu $y_1 = H \cdot \cos(\varphi/3)$, $y_2 = H \cdot \cos((\varphi + 2\pi)/3)$, $y_3 = H \cdot \cos((\varphi - 2\pi)/3)$.

Daraus folgen die Lösungen der ursprünglichen Gleichung mit $h_i = y_i - H/2$.

Nur die erste Lösung ist physikalisch interessant, denn für $V = 0$ wird $\cos(\varphi) = -1$, also $\varphi = \pi$. Dann ist $\cos(\pi/3) = 1/2$, $y_1 = H/2$ und $h_1 = 0$.

Die Anhebung ist sehr gering (einige Meter) verglichen mit der Tiefe der Oberkante der Betonsäule (2646m). Stellt man das im Maßstab 1:1000 dar, so reicht die Halbkugel vom Boden bis zur Decke eines 2,65m hohen Raumes, wobei nur die letzten 6,6 mm die Erhebung des flachen Hügels mit 375 mm Durchmesser über das ursprüngliche Bodenniveau sind.

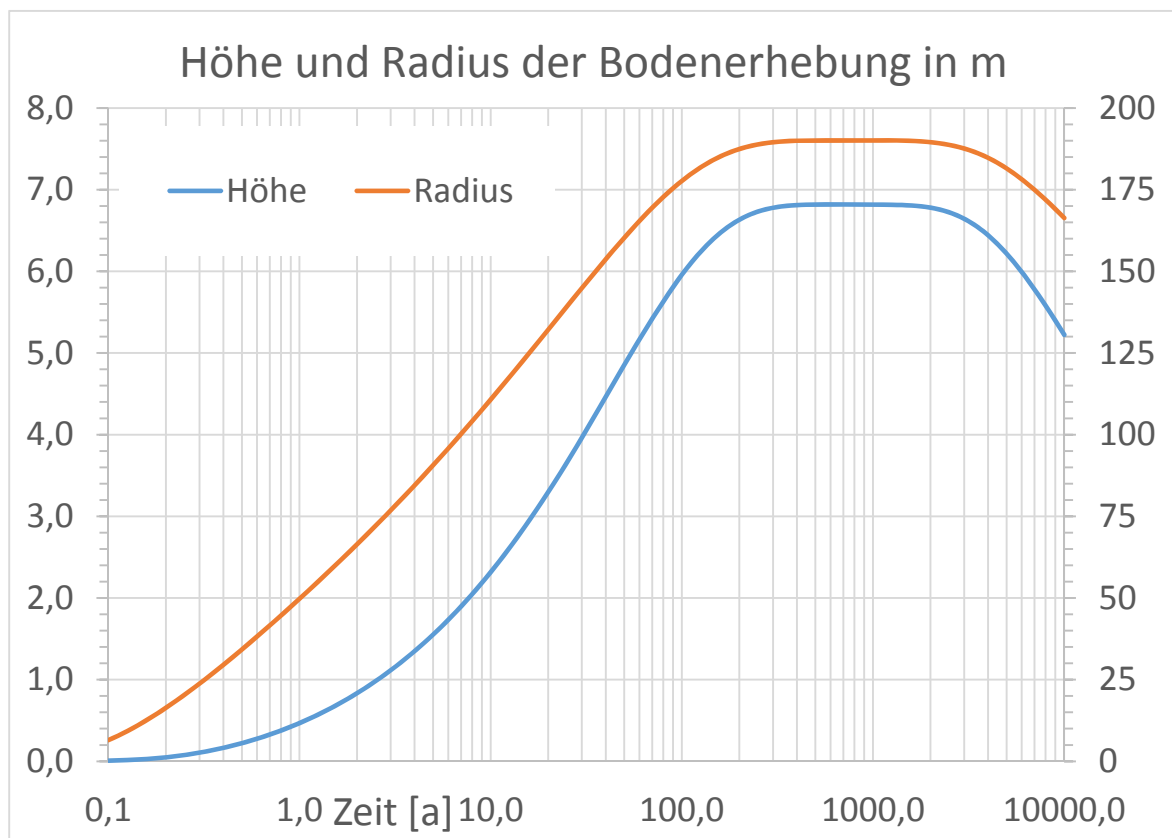


Abbildung 7: Höhe und Radius der Bodenerhebung in Abhängigkeit von der Zeit. Höhe(blau, linke Skala), Radius (orange, rechte Skala), Zeit logarithmisch.

Die Verringerung von Höhe und Durchmesser des Hügels ist nach einigen hundert Jahren möglich, weil die leichte Temperaturerhöhung im Abstand von mehr als 1000 m wohl eher direkt am Ort zur Ausdehnung und geringfügigen Anhebung führt und nicht durch Verdrängung zum Zentrum und dortiger Aufquellung den Hügel vergrößert.

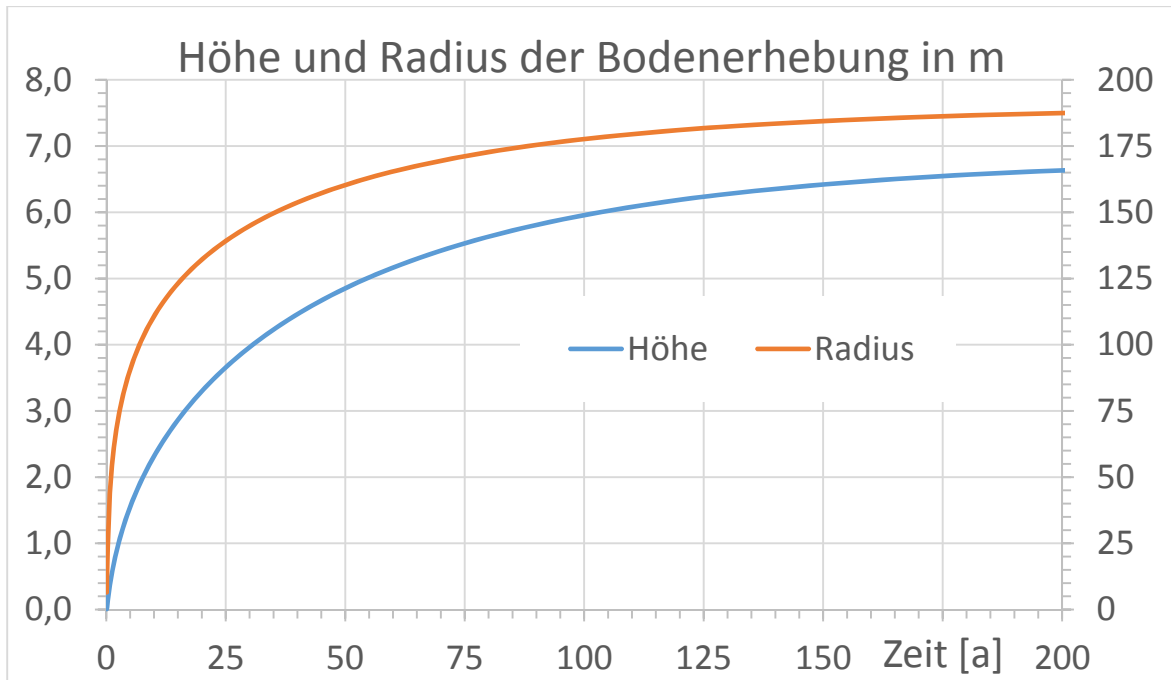


Abbildung 8: Höhe und Radius der Bodenerhebung in Abhängigkeit von der Zeit. Höhe(blau, linke Skala), Radius (orange, rechte Skala) Zeit linear.

Die relativ schnelle Anhebung im Zentrum erfolgt in den ersten 20 Jahren. Die Berechnung geht aber davon aus, dass zum Zeitpunkt 0 die gesamte Betonsäule schon gegossen ist und die 3,1 MW Wärme in das Salz fließen. Falls die Volumenausdehnung sich nicht bis zur Bodenoberfläche ausprägen soll, können radiale Bohrungen oder 360 senkrechte Schlitze der Breite 0,1 m und Tiefe 14,5 m im Steinsalz Hohlräume schaffen, die vom sich ausdehnenden Salz innerhalb von 200 Jahren zugeedrückt werden.

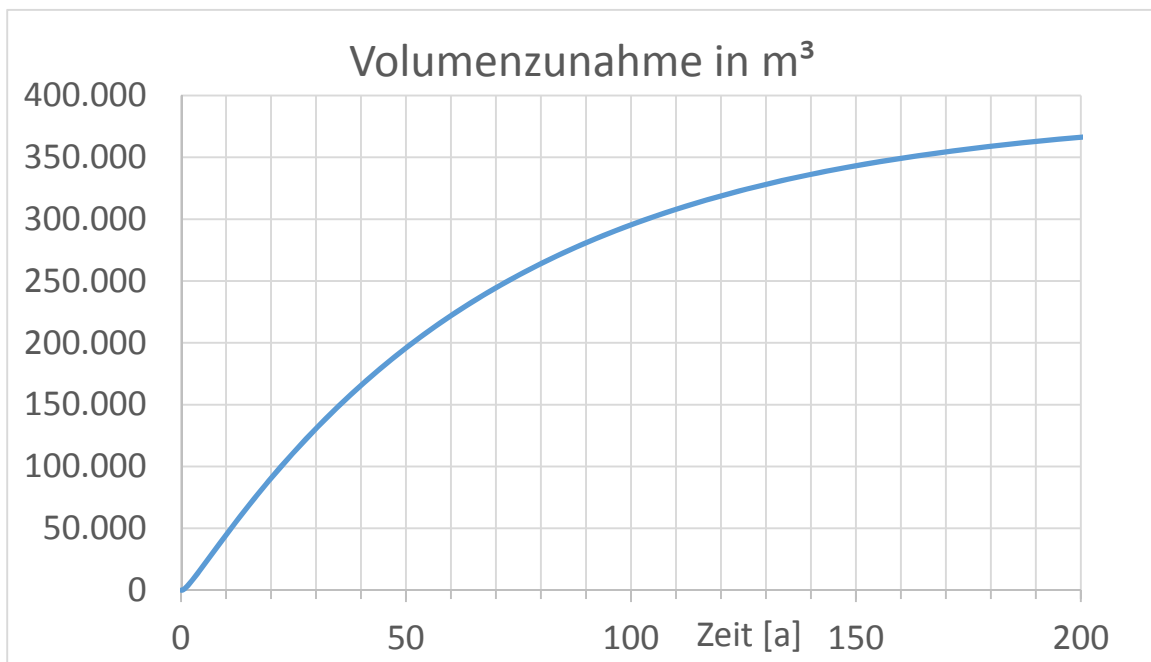


Abbildung 9: Volumenzunahme des Salzes in Abhängigkeit von der Zeit (linear).