Näherungsweise Entwicklung der Temperaturverteilung um eine DBHD 1.4 Endlager Säule mit Wärmeabgabe

Gerhard Herres, 27.4.2018 – 15.12.2018

Für eine senkrechte Säule von L_B = 740 m Länge und D_B = 23,0 m Durchmesser, in der zu Beginn $\dot{Q}_0 = 2{,}83\,MW$ Wärme freigesetzt werden, wird die Temperaturverteilung abgeschätzt. Die Säule enthält 328 Castor-Behälter mit hochradioaktivem Müll, die in 41 Ebenen mit jeweils 8 im Kreis stehenden Behältern angeordnet sind. Alle Castoren sind in Magnetit-Beton eingeschlossen, welches für eine gleichmäßige Wärmeverteilung in der zylindrischen Säule sorgt. Der Beton hat eine Dichte von ρ_B = 2850 kg/m³, spezifische Wärmekapazität c_B = 880 J/(kg*K) und Wärmeleitfähigkeit λ_B = 3,44 W/(m*K).
Die Betonsäule steht in Steinsalz, welches die abgegebene Wärme nahezu vollständig aufnimmt und ableitet. Das Steinsalz hat eine Dichte von ρ_S = 2200 kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität von c_S = 1200 J/(kg*K) und eine Wärmeleitfähigkeit von λ_S = 5,6 W/(m*K). Die Säule ist unterteilt in 16 m hohe Elemente, die durch 2 m breite Schichten aus Sand und Kies getrennt sind. Dieses Detail wird bei der Berechnung der Wärmeleitung vernachlässigt.

Die erhöhten Temperaturen im Salz führen zu einer Volumenausdehnung, die sich teilweise als eine Bodenaufwölbung in der Nähe der Bohrung und in weiterem Abstand von der Bohrung als sehr geringe Bodenanhebung zeigen. Die folgenden Bilder zeigen die maximale Anhebung und den Radius der Bodenaufwölbung, falls die gesamte Volumenausdehnung im Zentrum heraus quillt und eine geringere Aufwölbung, wenn nur die Volumenerhöhung bis zum Radius R=115 m ins Zentrum vordringt. Die übrige Volumenerhöhung verteilt sich dann in der gesamten Umgebung und führt zu geringer Bodenanhebung.

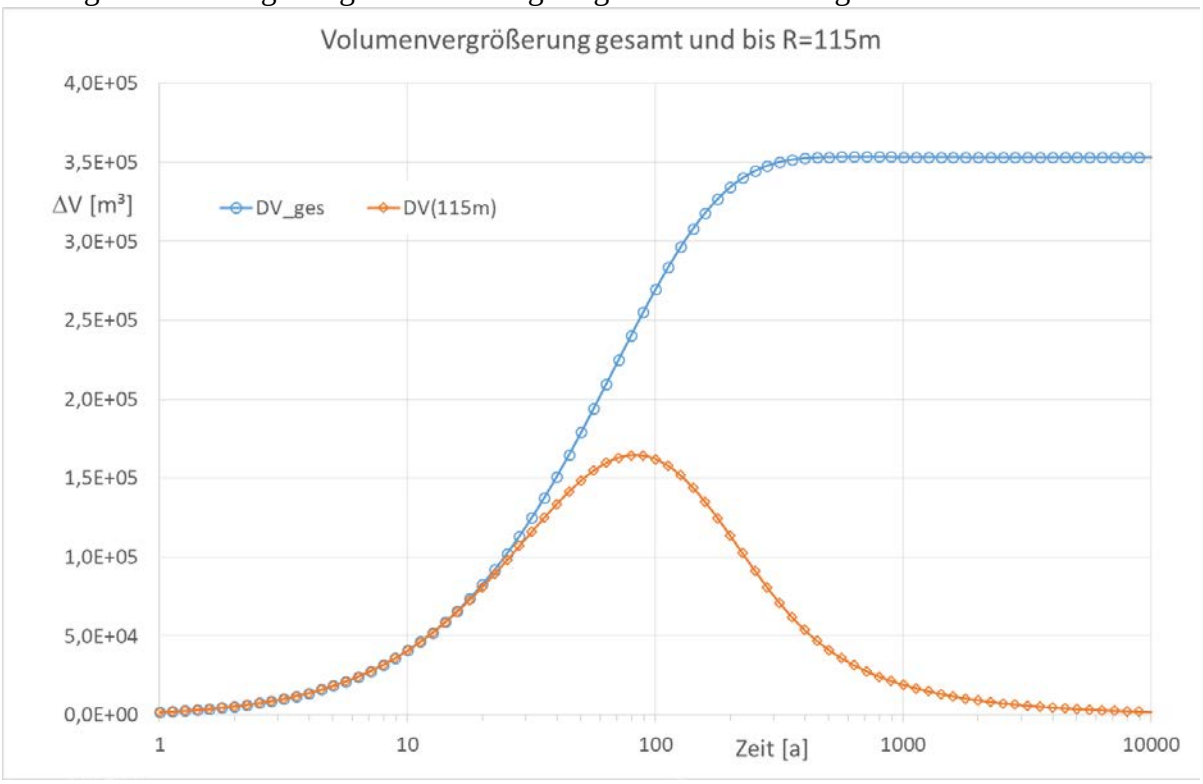


Abbildung 1: Volumenzunahme in Abhängigkeit von der Zeit für ΔV_{ges} und $\Delta V(R < 115\ m)$

Da sich die Wärme nach 100 Jahren in einen größeren Umkreis verteilt, kühlt das Salz innerhalb von R=115 m wieder ab und zieht sich dort zusammen. Dadurch sinkt auch der Hügel

wieder in sich zusammen. Die immer größere Differenz zwischen der blauen und der roten Kurve gibt die Volumenzunahme in immer weiter von der Bohrung entfernten Bereichen wieder, die sich dort aber nur als sehr geringe Bodenanhebung zeigt.

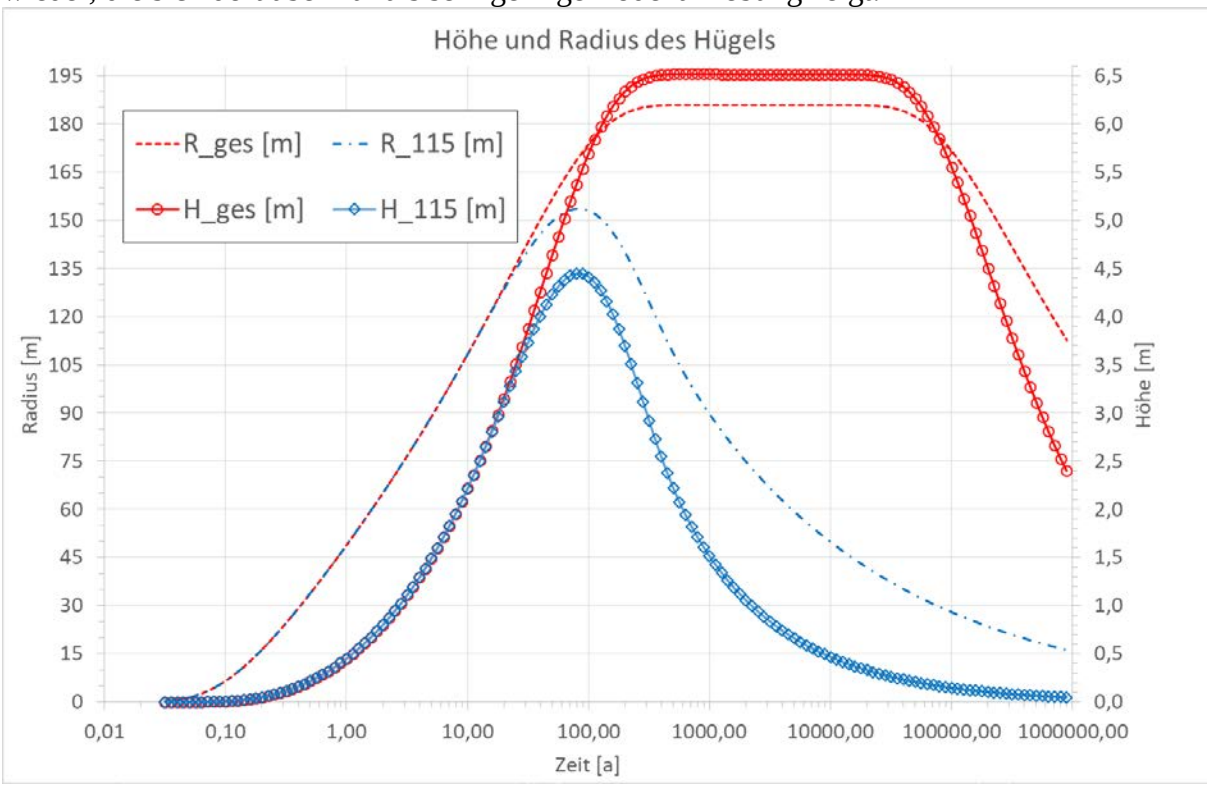


Abbildung 2: Höhe und Radius eines Kugelabschnitts in Abhängigkeit von der Zeit.

Für die Berechnung der obigen Kurven wurde angenommen, dass das Zusatzvolumen durch die Erwärmung als Kugelabschnitt über dem Zentralbereich der Bohrung liegt. Die Rote Kurve erfasst alle Volumenzunahmen bis zum Radius R = 6000 m. Nach rund 30.000 Jahren ist ein Teil der Wärme jedoch über diesen Bereich hinaus diffundiert und die zugehörige Volumenzunahme wird in der Summe nicht mehr berücksichtigt. Dadurch sind die angezeigten Werte von Höhe und Radius zu späteren Zeitpunkten wieder geringer.
Die maximale Höhe des Hügel bleibt unter H_{max} = 6,5 m bei einem Radius von R_{max} = 185 m falls die gesamte Volumenerhöhung bis ins Zentrum vordringt. Das ist aber sehr unwahrscheinlich, denn für große Abstände vom Zentrum ist die Temperaturerhöhung nur weniger als 20 K und die Duktilität wird sich nicht stark genug erhöhen, um das Zusatzvolumen hunderte Meter bis zum Zentrum zu drücken. Stattdessen wird sich einfach der Erdboden leicht anheben.
Falls nur die Volumenvergrößerung bis zum Abstand von R = 115 m berücksichtigt wird, quillt der Hügel bis zu H_{max} = 4,5 m und R_{max} = 155 m an und schrumpft nach 100 Jahren wieder. Man beachte, dass die Zeitachse logarithmisch aufgetragen ist. Der Schrumpfungsprozess verläuft also wesentlich langsamer als das Anwachsen.

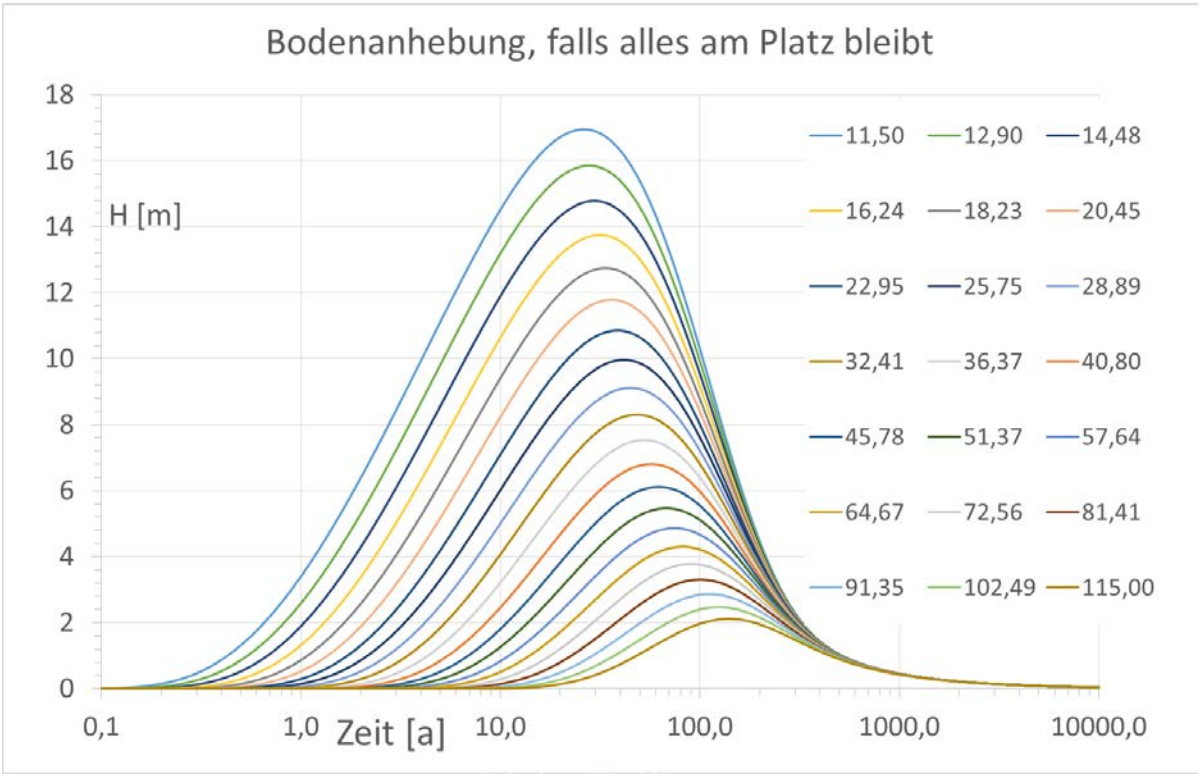


Abbildung 3: Bodenanhebung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für R < 115 m

Das obige Bild zeigt die Bodenanhebungen, falls die jeweilige Volumenvergrößerung in einer Zylinderschale sich nur nach oben ausprägt. Für Abstände jenseits R = 115 m sind diese Anhebungen geringer als 2 m und erreichen erst nach mehr als 120 Jahren ihr Maximum.

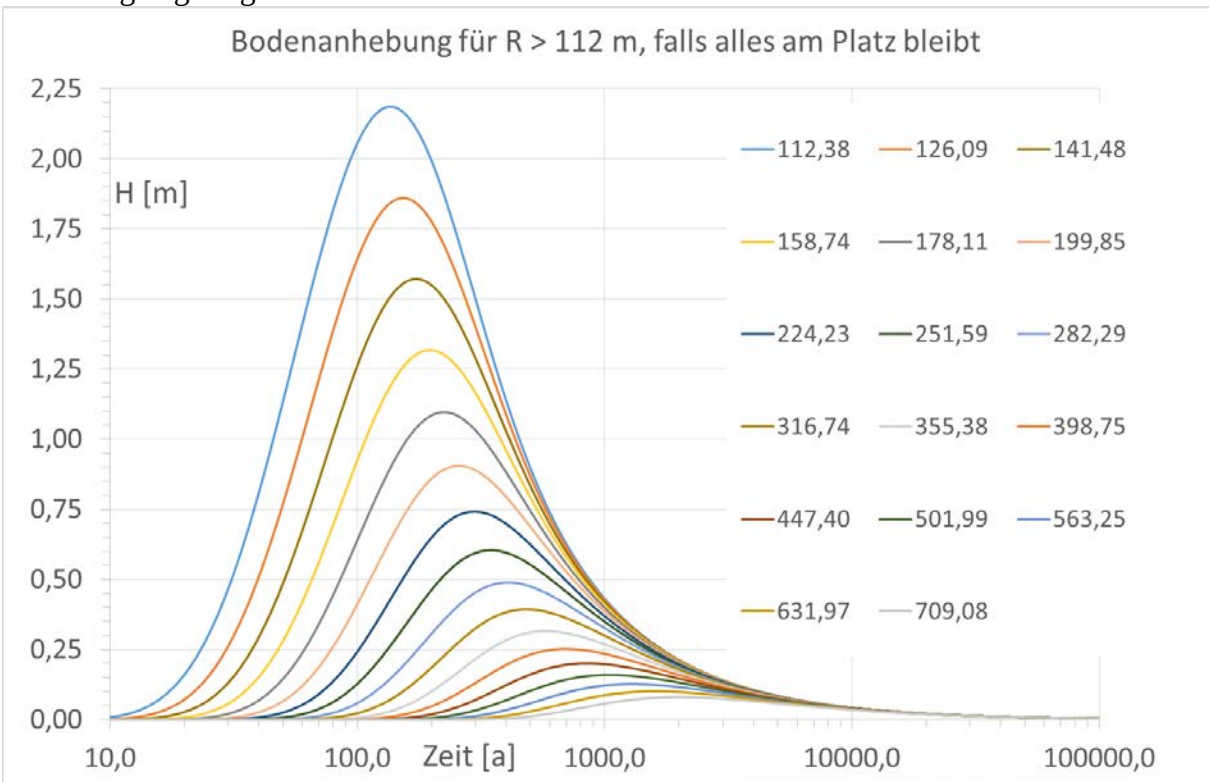


Abbildung 4: Bodenanhebung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für 112 m < R < 709 m

Bei Abständen R > 700 m ist die maximale Anhebung erst nach mehr als 2200 Jahren mit weniger als 8 cm erreicht.

Für genauere Aussagen über Umfang und Zeitpunkt der Bodenanhebungen benötigt man Angaben über die Viskosität, bzw. Duktilität des Salzes in Abhängigkeit von Temperatur und Druck.

Die oben dargestellten Volumenzunahmen folgen aus der zeitlich und räumlich berechneten Temperaturverteilung.
Zur Vereinfachung wird die Wärmeabgabe als ein-dimensionales Problem berechnet mit zylindrischer Geometrie einer unendlich langen Wärmequelle. Die Randeffekte oben und unten werden hier nicht betrachtet und führen bei genauerer Berechnung zu geringeren Temperatursteigerungen, da sich die Wärme auch in Zonen ausbreiten kann, die keine zentrale Wärmequelle enthalten.
Die Temperaturleitfähigkeit im Beton beträgt $a_B=\lambda_B/(\rho_B*c_B)$. Falls alle Castoren innerhalb kurzer Zeit eingelagert werden, nimmt die Leistungsdichte der Wärmequelle W(t) mit der Zeit exponentiell ab: $\dot{W}(t) = \dot{W}_0 * exp(-b \cdot t)$. Mit b = 4,588498491647 *10^{-10} 1/s.
Die Differentialgleichung der Temperaturverteilung in der Betonsäule lautet, mit der gemittelten Leistungsdichte der Wärmequelle zu Beginn der Einlagerung $\dot{W}_0 = \dot{Q}_0/(\pi \cdot R_B^2 \cdot L_B)$:

$$\frac{\partial T_B(r,t)}{\partial t} = a_B \left(\frac{\partial^2 T_B(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_B(r,t)}{\partial r} \right) + \frac{\dot{W}_0}{\rho_B c_B} \cdot e^{-bt} \qquad (1)$$

Sucht man eine Lösung der homogenen DGL, so gibt es zwei Wege. Der erste Weg trennt die DGL nach Separation der Variablen, durch einen Produktansatz für die Temperaturfunktion. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet dann:

$$T_{B,hom}(r,t) = C_1 \exp\left(\frac{-a_B \cdot y_m^2 \cdot t}{R_B^2} \right) J_0\left(\frac{r}{R_B} y_m \right) + C_2 \exp\left(\frac{-a_B \cdot y_m^2 \cdot t}{R_B^2} \right) Y_0\left(\frac{r}{R_B} y_m \right) \qquad (2)$$

Behandelt man die gesamte Betonsäule als homogene Wärmequelle, so kann die Besselfunktion 2. Art $Y_0(r)$, die bei r = 0 den Wert $-\infty$ hat, für dieses Problem keinen Beitrag zur Lösung leisten. Die Besselfunktionen $J_0(r * y_m/R_B)$ werden zur speziellen Lösung addiert, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

$$T_{B,hom}(r,t) = \sum_{m=1}^{M} C_m \exp\left(\frac{-a_B \cdot y_m^2 \cdot t}{R_B^2} \right) J_0\left(\frac{r}{R_B} y_m \right) \qquad (3)$$

Die Werte y_m sind dabei die Nullstellen der Besselfunktion 1. Art $J_0(r)$. Die Überlagerung der homogenen Lösung mit der speziellen Lösung und die Bestimmung der Koeffizienten C_m ist nur erforderlich, wenn auch für kurze Zeiten von wenigen Monaten eine exakte Lösung benötigt wird. Da die Exponentialfunktionen der homogenen Lösungen diese Beiträge sehr schnell abklingen lassen, sind sie schon nach wenigen Jahren vernachlässigbar klein.

$$a_B \cdot \frac{y_1^2}{R_B^2} = \frac{5{,}6\ \mathrm{W/(m * K)}}{2200\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 1200\ \mathrm{J/(kg * K)}} \cdot \frac{2{,}404825558^2}{11{,}6^2\ m^2} = 9{,}11665 \cdot 10^{-8} s^{-1} = \frac{1}{127 d}$$

Nach 3*127 d = 381 Tagen ist der Einfluss des ersten Terms nur noch knapp 5%, nach 2 Jahren nur noch 0,3% des Beitrag bei t = 0. Die folgenden Terme für m > 1 klingen noch schneller ab, da die Nullstellen bei y_2 = 5,520078110, y_3 = 8,653727913, usw. liegen.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$$T_{B,spez}(r,t) = \left\{\frac{-\dot{W}_0}{b\cdot\rho_B c_B} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,n!}\left(\frac{-b\cdot r^2}{4a_B}\right)^n (f_0 - n\frac{g_0}{b} + g_0\cdot t)\right\}\cdot e^{-b\cdot t} + C_B \qquad (4)$$

Diese Temperaturfunktion wächst zunächst mit der Zeit nahezu linear an, um später exponentiell abzufallen, da nach einigen hundert Jahren nur noch wenig Zerfallswärme frei wird und die im Beton gespeicherte Wärme langsam in das umgebende Salz diffundiert.
Eine zweite Temperaturfunktion muss für das Salz gefunden werden. An der Berührungsstelle beider Funktionen müssen die Anschlussbedingungen, Temperaturgleichheit und Gleichheit der Wärmeströme, erfüllt werden. Wegen der zylindrischen Geometrie muss die Temperaturfunktion des Salzes eine mit dem Radius abfallende Funktion enthalten. Hier kommt die zweite Methode zur Lösung partieller DGL's zum Einsatz, denn die Besselfunktionen 1. und 2. Art haben immer die Eigenschaft, dass sie mit größer werdendem Radius Schwingungen zeigen. Die zweite Methode basiert auf einem allgemeinen Reihenansatz in Potenzen von r mit Temperatur abhängigen Koeffizienten

$$T_{S,hom}(r,t) = \left\{a_S\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,n}\left(\frac{-r^2}{4a_S\cdot t}\right)^n\right\} + C_S \qquad (5)$$

Die Anschlussbedingungen bei r = R_B lauten:

1. $T_B(R_B,t) = T_S(R_B,t)$ 2. $\dot{Q}_B(R_B,t) = \dot{Q}_S(R_B,t)$

Ausgeführt lautet die erste Bedingung:

$$\sum_{m=1}^{M} C_m \exp\left(\frac{-a_B\cdot y_m^2\cdot t}{R_B^2}\right) J_0\left(\frac{r}{R_B}y_m\right) + \left\{\frac{-\dot{W}_0}{b\cdot\rho_B c_B} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!n!}\left(\frac{-b\cdot r^2}{4a_B}\right)^n (f_0 - n\frac{g_0}{b} + g_0\cdot t)\right\}\cdot$$
$$e^{-b\cdot t} + C_B = a_S\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!n}\left(\frac{-{R_B}^2}{4\cdot a_S\cdot t}\right)^n + C_S$$

Die Gleichung des Wärmestroms, der aus der Betonsäule in das Salz übergeht, lautet:

$$\dot{Q}_B(t,r) = -\lambda_B 2\pi R_B L_B\cdot\left(\frac{\partial T_B}{\partial r}\right)_{r=R_B} = \dot{Q}_S(t,r) = -\lambda_S 2\pi R_B L_B\cdot\left(\frac{\partial T_S}{\partial r}\right)_{r=R_B}$$

$$-\lambda_B 2\pi R_B L_B\left\{\sum_{m=1}^{M} C_m\exp\left(\frac{-a_B\cdot y_m^2\cdot t}{R_B^2}\right)\frac{y_m}{R_B}J_0'(y_m) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!\cdot n!\cdot R_B}\left(\frac{-b\cdot {R_B}^2}{4\cdot a_B}\right)^n\left(f_0 - n\frac{g_0}{b} + g_0\cdot t\right)\right\}\cdot e^{-b\cdot t} =$$

$$-\lambda_S\cdot 2\pi\cdot R_B L_B\cdot\ a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!\cdot n\cdot R_B}\left(\frac{-{R_B}^2}{4\cdot a_S\cdot t}\right)^n$$

Man sieht an diesen Gleichungen, dass eine einfache Gleichsetzung nicht gelingen kann, denn die Zeitabhängigkeit ist zu unterschiedlich. Ein Ansatz aus dem Lehrbuch „Wärme- und Stoffübertragung" von Hans-Dieter Baehr und Karl Stephan führt aber weiter. Dort wird für eine Linienquelle mit einem analogen Funktionalansatz gerechnet, der die Diffusionsgleichung für eine zeitlich konstante Wärmequelle erfüllt. Für den Fall einer zeitlich veränderlichen Quellstärke wird eine Integration dieser Funktion über das Zeitintervall $0 \le \tau \le t$ erzeugt [Kap. 2.3.7.2 Punkt- und linienförmige Wärmequellen, S.207ff, 7. Aufl.].

Für eine zum Zeitpunkt t=0 freigesetzte Wärmemenge Q_0:

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q_0/L}{4\pi\lambda t} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \tag{6}$$

Für zeitliche veränderliche Quellstärke ist eine Integration erforderlich:

$$\vartheta(r,t) = \frac{1}{4\pi\lambda L} \cdot \int_{\tau=0}^{\tau=t} \dot{Q}_0(\tau) \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{t-\tau} \tag{7}$$

Nimmt man vereinfachend an, dass der größte Teil der Wärme, die innerhalb einiger Jahrzehnte freigesetzt wird, in das Salz diffundiert, so kann man die im Beton verbleibende Wärmemenge vernachlässigen und als Zeitfunktion $\dot{Q}(\tau) = \dot{Q}_0 \cdot \exp(-b \cdot \tau)$ einsetzen. Damit macht man zwei Fehler. Erstens nimmt man eine zu große Wärmemenge an, die auch zweitens zu schnell in das Salz eindringt, denn die Wärmeleitfähigkeit des Betons ist geringer als diejenige des Salzes, so dass die resultierenden Temperaturen in Wirklichkeit geringer und später eintreten werden. Mit dieser Vorgehensweise erhält man also höhere Temperaturen, aus denen dann auch größere Volumenzunahmen folgen. Die Bodenanhebungen dürften in Wirklichkeit also geringer ausfallen, als die folgenden Berechnungen ergeben.

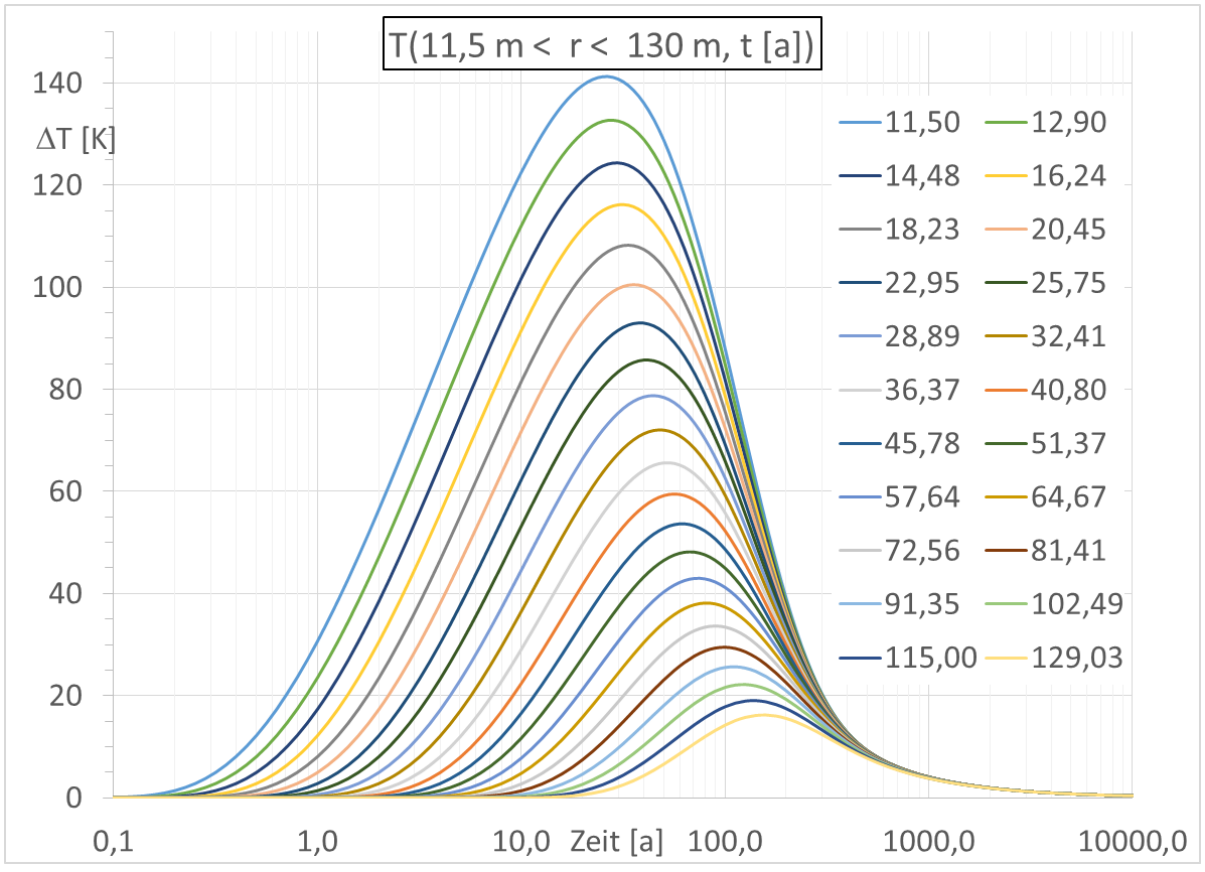


Abbildung 5: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für R < 130 m

In obiger Grafik sind die Temperaturen in Abhängigkeit von der Zeit für verschiedene Abstände vom Zentrum gezeigt. Direkt an der Grenze Beton/Salz bei R = 11,5 m, wird die maximale Temperaturerhöhung mit ΔT = 141 K nach etwa 25 Jahren erreicht, jenseits des Abstands von R = 115 m wird es selbst nach 140 Jahren nicht mehr als 19 K wärmer sein.

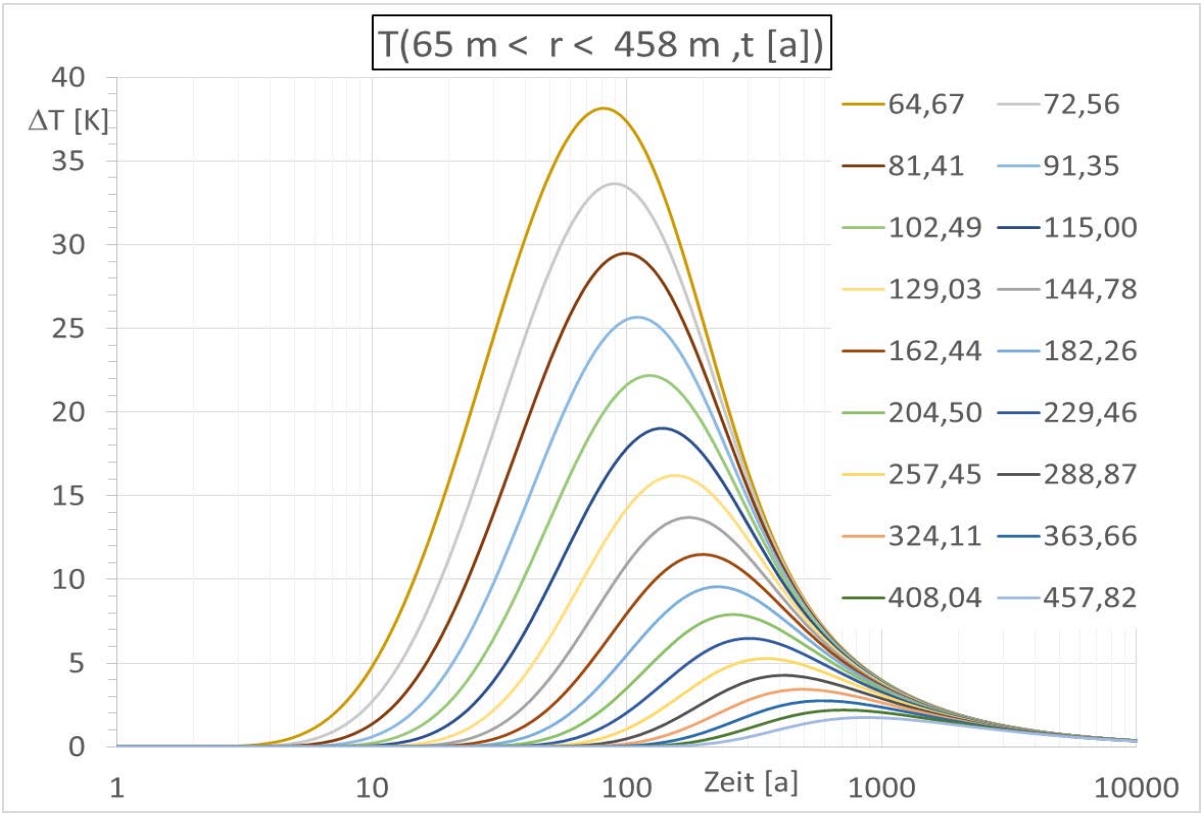


Abbildung 6: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für 64 m <R <458 m

In Abbildung 6 sieht man, dass im Abstand von mehr als 450 m die maximale Temperaturerhöhung weniger als 2 K beträgt und dies erst nach mehr als 1000 Jahren eintritt.

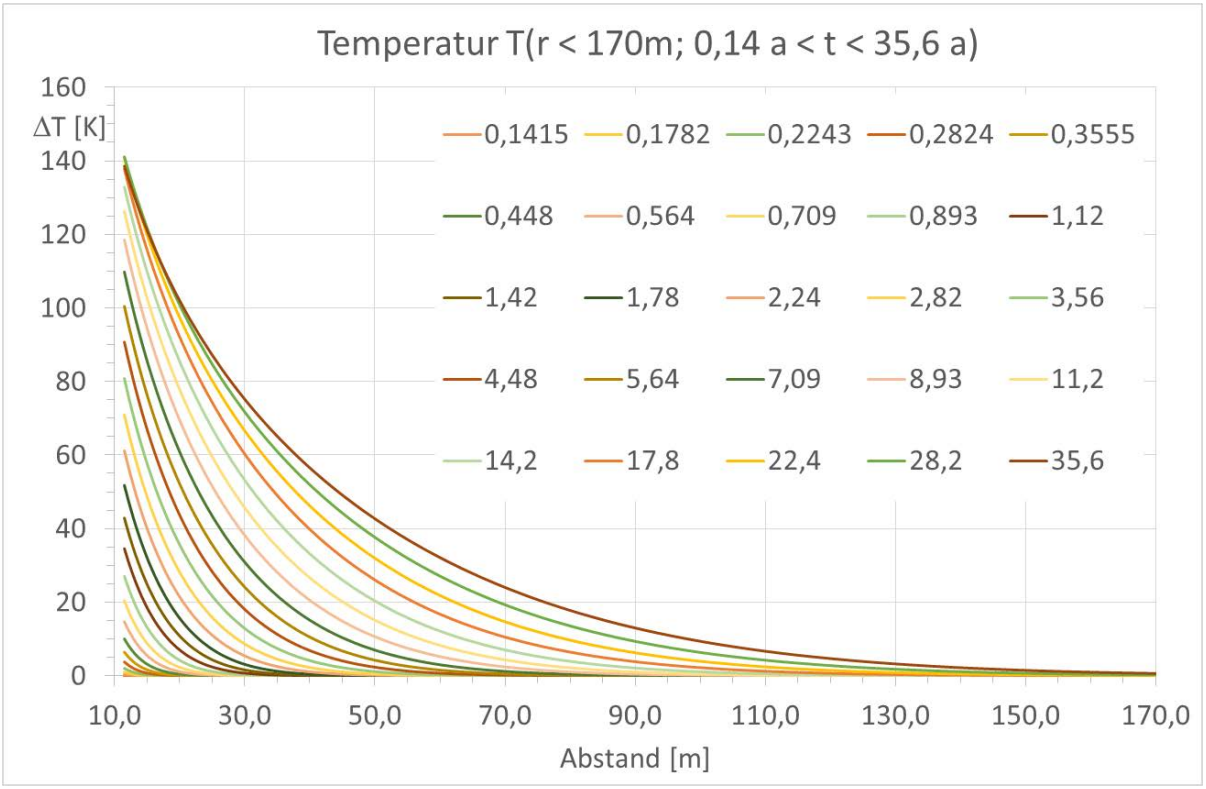


Abbildung 7: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für t < 36 Jahre

Im Bild 7 sieht man die Temperaturentwicklung als Funktion des Abstandes R für verschiedene Zeiten. Nach etwa 30 Jahren beginnt an der Grenze Beton/Salz die Temperatur wieder zu sinken und die Wärme diffundiert zu größeren Abständen in das Salz hinein.

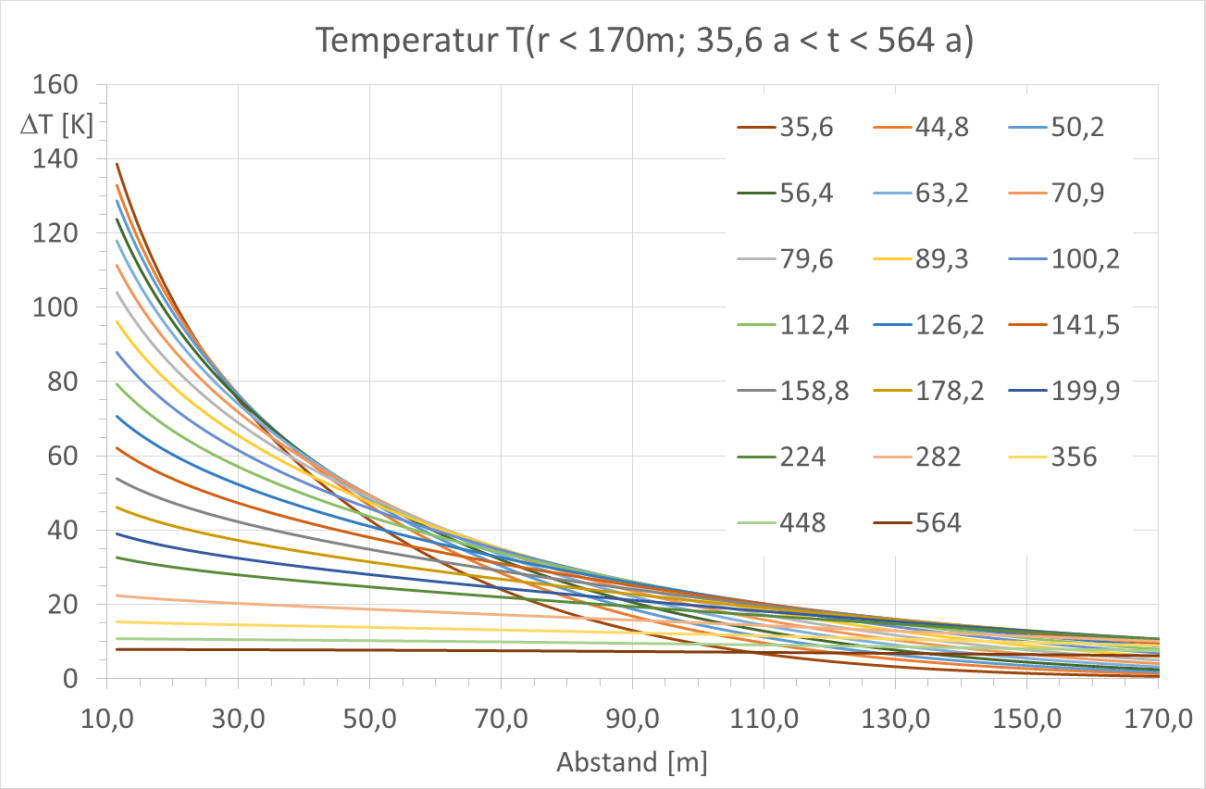


Abbildung 8: Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von Radius und Zeit für 35 a < t < 564 a

Bis ungefähr 30 Jahre nach Beginn der Einlagerung steigt die Temperatur im Salz direkt an der Grenze zur Betonsäule an, danach fällt sie wieder, weil die Wärme im Salz schneller weiter geleitet wird, als neue Nachzerfallswärme aus dem Inneren nach kommt. Nach rund 560 Jahren ist überall die Temperaturerhöhung geringer als 10 K. Diese Näherung macht allerdings zwei Fehler. Erstens behandelt sie die Betonsäule mit der gleichen hohen Wärmeleitfähigkeit wie das Salz und auch die Dichte und spez. Wärmekapazität werden gleichgesetzt, zusammengefasst in der Temperaturleitfähigkeit $a = \lambda/\rho c$. Dadurch kommt die Wärme schneller zum Salz als in der Realität. Zweitens wird nicht berücksichtigt, dass sich die Wärmequelle nicht im Zentrum der Säule, sondern in einem Ring zwischen 3,98 m < r < 6,78 m befindet. Der Abstand von der Wärmequelle zur Grenze Beton/Salz ist also nur halb so weit wie in der Rechnung, dafür wird zu Beginn ein Teil der Wärme ins Zentrum fließen und erst später nach außen zum Salz. Außerdem sind die Castoren nur etwa 6,06 m lang und stehen in einem vertikalen Abstand von 18 m. Die Wärme wird also nur auf einem Drittel der Höhe freigesetzt und so ist die wirkliche Wärmestromdichte lokal etwa 3 mal so hoch. Im Beton verteilt sich die Wärme dann radial und axial jeweils etwa 5 m bis zur Grenze zum Salz bzw. zur Trennfuge. Lokal kann deshalb die Temperaturerhöhung etwas größer sein, als mit diesem Verfahren berechnet. Das wird aber ausgeglichen durch die Zonen, die kühler sind in Höhe der Trennfuge. Dieser lokale Unterschied ist auch zeitlich begrenzt, denn schon 50 Jahre nach Beginn der Einlagerung ist selbst die Temperaturerhöhung an der Grenze Beton/ Salz unter 130 K gesunken, wie aus Abbildung 3 zu erkennen ist. Wieder 50 Jahre später ist die höchste Temperatur um weitere 40 K gesunken. Die Rechnung geht von der Vorstellung aus, dass alle 328 Castoren innerhalb sehr kurzer Zeit eingelagert werden, so dass ab dem Zeitpunkt 0 die Nachzerfallswärme von 2,83 MW in Beton und Salz fließen. Das ist aber technisch nicht machbar, denn die Absenkung von

8 Castoren und die Auffüllung mit Beton und dessen Aushärtung benötigen schätzungsweise 4 bis 6 Wochen pro Ebene. So sind also mindestens 3,2 bis 4,75 Jahre nötig, die gesamte Betonsäule zu erstellen. Beginnt man mit schon länger gelagerten Castoren, so ist deren Nachzerfallswärme geringer und die folgende Temperaturerhöhung ebenfalls.

Nicht berücksichtig ist auch, dass zur Erstellung der Bohrung das Gestein und das Salz gekühlt werden müssen, denn in 3000 m Tiefe liegen Gesteinstemperaturen von 100°C vor, bei denen Gerät und Mannschaft sicher nicht erfolgreich arbeiten können. Das gekühlte Salz wird später die Abbindungswärme des Betons und einen Teil der Nachzerfallswärme aufnehmen. Abhängig von Dauer und Umfang dieser Kühlung wird die nähere Umgebung des Bohrlochs um einige 10 K abgekühlt werden und die entsprechende Wärme später wieder aufnehmen. Die zugehörige Volumenausdehnung fällt dann auch geringer aus.

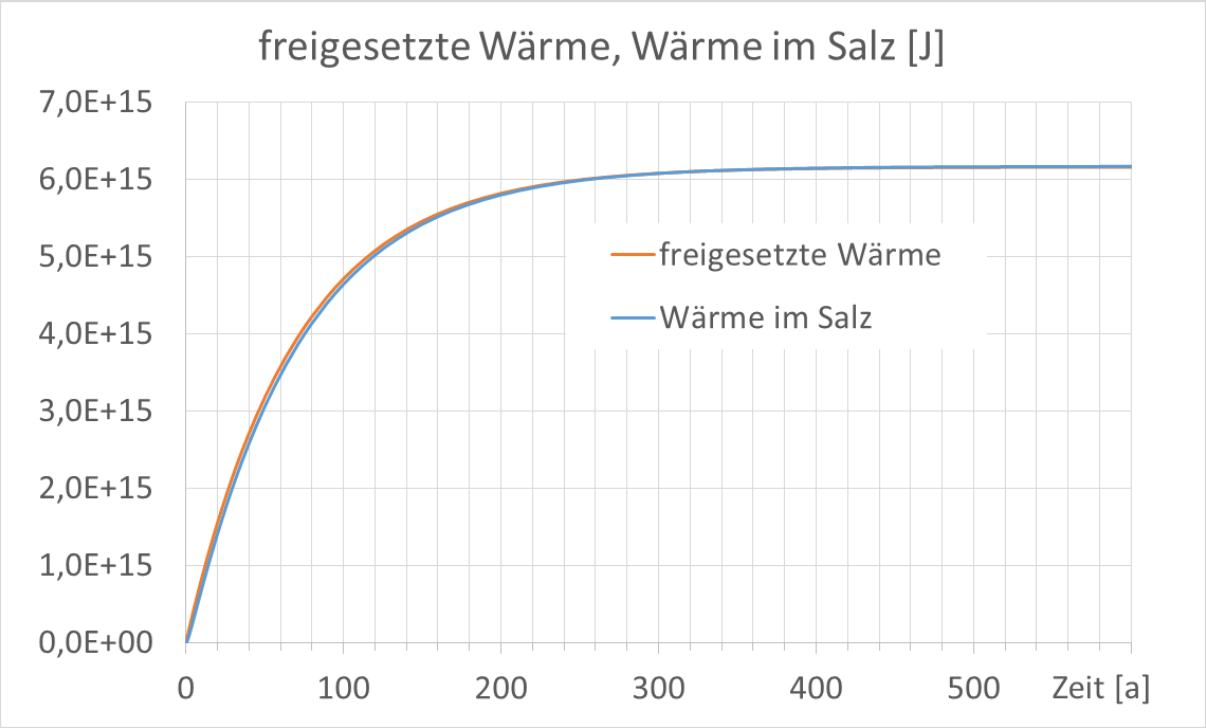


Abbildung 9: Freigesetzte Wärme und Wärme im Salz in Abhängigkeit von der Zeit.

In Abbildung 9 ist zu sehen, wie viel von der freigesetzten Wärme bis zum Zeitpunkt t schon im Steinsalz zu finden ist. Zu Beginn ist noch ein beträchtlicher Anteil in der Betonsäule. Nach etwa 100 Jahren ist in der direkten Umgebung des Betons die Temperatur schon wieder gesunken und der größte Teil der Wärme in weitem Abstand vom Zentrum. Nach etwa 400 Jahren kommt nur noch wenig Nachzerfallswärme dazu und das Maximum ist fast erreicht, gekennzeichnet durch die horizontale orange Linie. Die maximale Wärmemenge ergibt sich durch die Integration

$$Q_{max} = \int_0^{\infty} \dot{Q}_0 \cdot e^{-b \cdot t} dt = \frac{2{,}83\ MW}{-b} \cdot (e^{-b\infty} - 1) = \frac{2{,}83\ MW * s}{4{,}588498491647\ * 10^{-10}} = 6{,}17 PJ$$

In der Schrift VIRTUS, Virtuelles Untertagelabor im Steinsalz, S.68, ist eine Funktion für die lineare thermische Ausdehnung des Salzes zu finden.

$$\alpha = 3{,}025 \cdot 10^{-5} + 2{,}942 \cdot 10^{-8} \cdot T - 2{,}5677 \cdot 10^{-12} \cdot T^2 \qquad (8)$$

Die Einheit der Temperatur ist in der Quelle nicht angegeben. Ich setze die Temperatur in Kelvin ein. Die Volumenausdehnung ist die dritte Potenz dieser Funktion. Die resultierende Volumenzunahme wird auf die Anfangstemperatur T=100°C = 373,15K in 3000 m Tiefe bezogen.

$$\Delta V = V \cdot (+ 1{,}51086 \cdot 10^{-4} * \Delta T + 8{,}62061 \cdot 10^{-8} \cdot \Delta T^2) \qquad (9)$$

Da die Funktion der linearen thermischen Ausdehnung etwa linear mit der Temperatur anwächst, ist die relative Ausdehnung umso größer, je heißer die Anfangstemperatur ist. Die mit der Funktion (9) approximierte Volumenausdehnung ist also für den Kopf der Betonsäule zu groß, da dort die Temperatur des Steinsalzes ursprünglich um 0,74 * 30 K = 22,2 K geringer ist als am Fuß der Säule. Die Volumenzunahme ist in Abbildung 1 zu sehen.

Die maximale Volumenzunahme ergibt sich aus der Temperaturerhöhung im Salz nach langer Zeit:

$$\Delta V = V \cdot 1{,}51086 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta T = \frac{Q_{max}}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} \cdot 1{,}51086 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta T = 353.480\, m^3 \qquad (10)$$

Diese Volumenzunahme ist in Abbildung 6 als blaue Linie zu sehen. Die rote Linie stellt die Summe aller Volumenzunahmen dar, summiert über konzentrische Zylinderschalen der Länge 740 m bis zum Radius R = 115 m. Da mit zunehmender Zeit immer mehr Wärme in weiter außen liegenden Zylinderschalen zu finden ist, ist dort auch die Volumenzunahme, die bei der Summierung nicht erfasst wird. Diese Volumenzunahme wird sich möglicherweise nicht bis zur zentralen Betonsäule bemerkbar machen, sondern einfach die darüber liegenden Schichten um einige cm anheben.

Da zuerst die Salzschicht nahe an der Betonsäule warm wird, wird dort auch die Duktilität des Salzes zuerst erhöht. Die spätere Erwärmung entfernterer Schichten um den zentralen Zylinder kann deshalb leichter zur Mitte hin ausweichen. Ich nutze deshalb als Modell für die Volumenausdehnung des Salzes die Vorstellung, dass sich der größte Teil der Volumenzunahme nahe der zentralen Betonsäule ergibt. Am Kopf der Betonsäule quillt dann das zusätzliche Salzvolumen nach oben und verschiebt eine gedachte Halbkugel, die bis zur Erdoberfläche reicht, nach außen. Das Zentrum dieser Kugel liegt H= 2646 m unter der Erdoberfläche. Ein Kugelabschnitt einer Kugel mit dem Radius R = H + h hat den Radius $a = \sqrt[2]{h \cdot (2 \cdot R - h)}$, die Höhe h und das Volumen $V = \pi h^2 \cdot (R - h/3)$. Nun ist es nötig eine kubische Gleichung zu lösen, die h als Funktion des zusätzlichen Volumens bestimmt.

$$h^3 + \frac{3}{2} H h^2 - \frac{3V}{2\pi} = 0 \qquad (11)$$

Mit der Substitution h = y - H/2 ergibt sich $y^3 - \frac{3}{4} H^2 \cdot y + \frac{1}{4} H^3 - \frac{3}{2\pi} V = 0$

Die Theorie der Lösung kubischer Gleichungen (Cardano) setzt

$$p = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} H\right)^2 = -\frac{3}{4} H^2 \quad \text{und} \quad q = \frac{2}{27}\left(\frac{3}{2} H\right)^3 - \frac{3}{2\pi} V = \frac{1}{4} H^3 - \frac{3}{2\pi} V\,. \qquad (12)$$

Daraus wird $\rho = \sqrt[2]{-p^3/27} = \frac{H^3}{8}$ und $\cos\varphi = -\frac{q}{2\rho} = \frac{6V}{\pi H^3} - 1.$

Die drei reellen Lösungen ergeben sich zu $y_1 = H \cdot \cos(\varphi/3)$, $y_2 = H \cdot \cos((\varphi + 2\pi)/3)$, $y_3 = H \cdot \cos((\varphi - 2\pi)/3)$.

Daraus folgen die Lösungen der ursprünglichen Gleichung mit $h_i = y_i - H/2$.

Nur die erste Lösung ist physikalisch interessant, denn für V = 0 wird $\cos(\varphi) = -1$, also $\varphi = \pi$. Dann ist $\cos(\pi/3) = 1/2$, $y_1 = H/2$ und $h_1 = 0$.

Die Anhebung ist sehr gering (einige Meter) verglichen mit der Tiefe der Oberkante der Betonsäule (2646m). Die Abbildung 2 zeigt Höhe und Radius des Kugelabschnitts.

Abbildung 7: Höhe und Radius der Bodenerhebung in Abhängigkeit von der Zeit. Höhe(blau, linke Skala), Radius (orange, rechte Skala), Zeit logarithmisch.

Die Verringerung von Höhe und Durchmesser des Hügels ist nach einigen hundert Jahren möglich, weil die leichte Temperaturerhöhung im Abstand von mehr als 1000 m wohl eher direkt am Ort zur Ausdehnung und geringfügigen Anhebung führt und nicht durch Verdrängung zum Zentrum und dortiger Aufquellung den Hügel vergrößert.

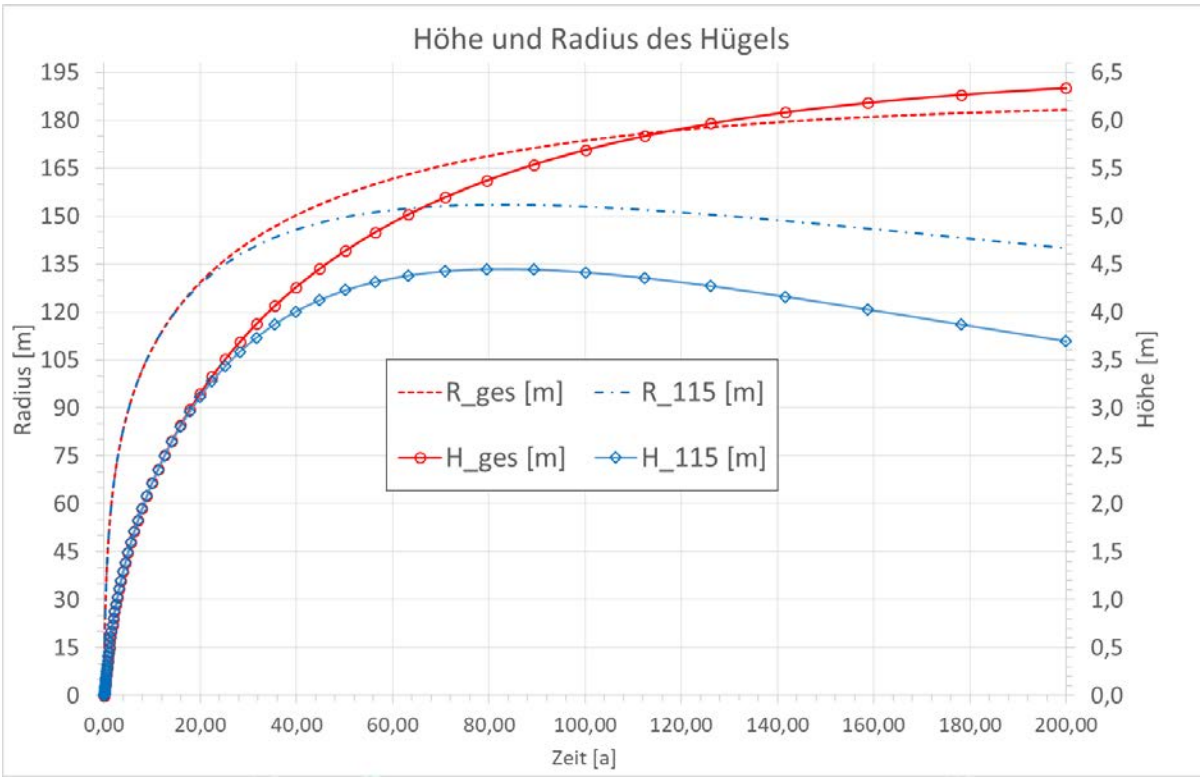
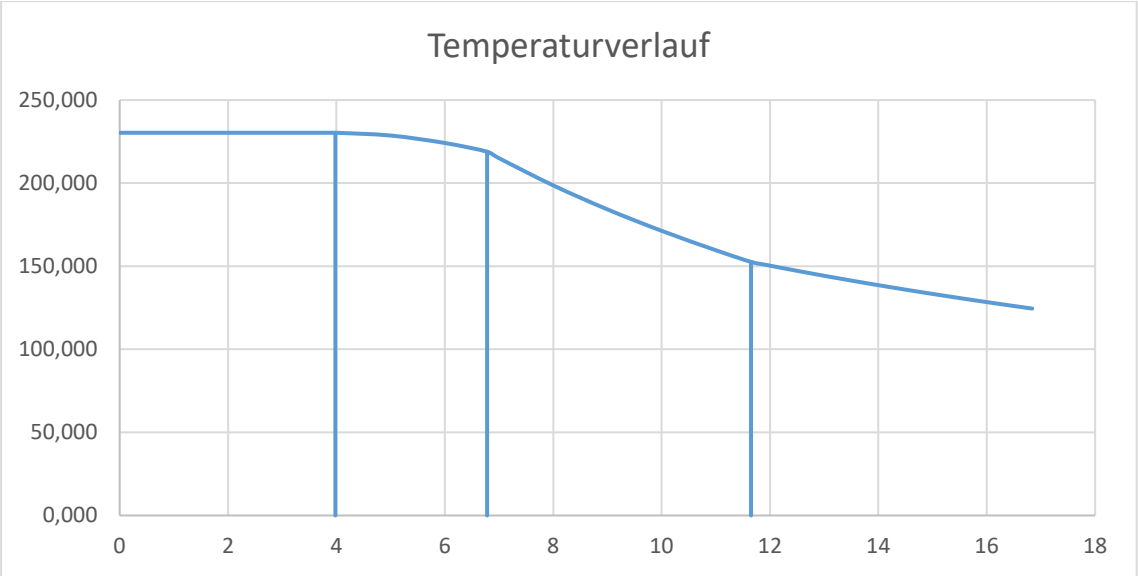


Abbildung 10: Höhe und Radius der Bodenerhebung in Abhängigkeit von der Zeit. Höhe (Kreise, rechte Skala), Radius (gestrichelte Linie, linke Skala), Zeit linear.

Die relativ schnelle Anhebung im Zentrum erfolgt in den ersten 20 Jahren. Die Berechnung geht aber davon aus, dass zum Zeitpunkt 0 die gesamte Betonsäule schon gegossen ist und die 2,83 MW Wärme in das Salz fließen. Falls die Volumenausdehnung sich nicht bis zur Bodenoberfläche ausprägen soll, können radiale Bohrungen oder 360 senkrechte Schlitze der Breite 0,1 m und Tiefe 14,5 m im Steinsalz Hohlräume schaffen, die vom sich ausdehnenden Salz innerhalb von 100 Jahren zugedrückt werden.

Mit dieser Näherungsrechnung zur Temperaturverteilung im Salz kann man nun die quasistationäre Temperaturverteilung im Beton angehen.



Von innen nach außen gibt es vier Zonen:

1. Zone Magnetit-Beton $0 < r < 3{,}98$ m $= r_1$
2. Zone Quellzone mit 8 Castoren $3{,}98$ m $< r < 6{,}78$ m $= r_2$
3. Zone Magnetit-Beton $6{,}78$ m $< r < 11{,}5$ m $= r_3$
4. Zone Salz $11{,}5$ m $< r$

Für diese Zonen werden vier Temperaturfunktionen definiert:

$T_1 = T_Z$

$T_2 = A_2 * r^2 + B_2 * \ln(r) + C_2$

$T_3 = A_3 * r^2 + B_3 * \ln(r) + C_3$

$T_4 = T_{Salz,max} = A_4 * (r_m(t)-r)^2$

Mit dieser Näherung vernachlässigt man den Wärmestrom, der zu Beginn aus der Quellzone in die erste Zone fließt. Als Folge werden die Temperaturen höher berechnet, als sie es in Wirklichkeit sein werden. Eine genauere Rechnung muss den Temperaturanstieg in der ersten Zone über ein Integralverfahren berücksichtigen. Dadurch würde ein Teil der freigesetzten Wärme in den ersten Jahren nicht nach außen, sondern nach innen fließen und erst später, wenn sich auch die Quellzone schon wieder leicht abkühlt, könnte diese gespeicherte Wärme nach außen abfließen.

Zur Bestimmung der 9 Parameter dieser 4 Temperaturfunktionen müssen die Grenzbedingungen für Temperatur und Wärmestrom an den drei Radien r_1, r_2 und r_3, die Quellstäke in Zone 2, die Quellenfreiheit in Zone 3 und die Integralbedingung in Zone 4 berücksichtigt werden.

1T: $T_1 = T_2 = A_2 * r_1^2 + B_2 * ln(r_1) + C_2$

1Q: $\dot{Q}_1 = 0 = -\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot L \cdot \{\partial T_2/\partial r\}_{r1} = -\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot L \cdot (2 \cdot A_2 \cdot r_1 + B_2/r_1)$

➔ $B_2 = -2 \cdot A_2 \cdot r_1^2$

2T: $T_2 = A_2 * r_2^2 + B_2 * ln(r_2) + C_2 = T_3 = A_3 * r_2^2 + B_3 * ln(r_2) + C_3$

2Q: $\dot{Q}_2 = -\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L \cdot \{\partial T_2/\partial r\}_{r2} = -\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L \cdot (2 \cdot A_2 \cdot r_2 + B_2/r_2)$
$= -\lambda_3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L \cdot (2 \cdot A_3 \cdot r_2 + B_3/r_2)$

Quellstärke in Zone 2 : $\dot{Q}_2 = \dot{Q}(t) = -\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L \cdot (2 \cdot A_2 \cdot r_2 - 2 \cdot A_2 \cdot r_1^2/r_2)$

➔ $A_2 = -\dot{Q}(t)/[\lambda_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot L \cdot (r_2^2 - r_1^2)]$

Quellenfreiheit in Zone 3 : $A_3 = 0$ $\dot{Q}_2 = -\lambda_3 \cdot 2\pi r_2 L \cdot \partial T_3/\partial r = -\lambda_3 \cdot 2\pi r_2 L \cdot (B_3/r_2)$

➔ $B_3 = \dot{Q}_2/(-\lambda_3 \cdot 2\pi L)$

3T: $T_3 = B_3 * ln(r_3) + C_3 = T_4 = A_4 * (r_m(t) - r_3)^2$
3Q: $\dot{Q}_3 = \dot{Q}_2 = -\lambda_4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_3 \cdot L \cdot \{\partial T_4/\partial r\}_{r3} = \lambda_4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_3 \cdot L \cdot 2 \cdot A_4 \cdot (r_m(t) - r_3)$

In einer stationären Lösung würden sich die Temperaturen in den Zonen 1 bis 3 nicht ändern und die gesamte freigesetzte Wärme sammelt sich in Zone 4. Da die Wärmefreisetzung sich nur sehr langsam verändert, kann man für Zeitabschnitte von einem Jahr von einer konstanten Wärmeproduktion ausgehen. In dieser Zeit erhöht sich der Energieinhalt in Zone 4 um

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_3 \cdot L \cdot A_4(t) \cdot (r_m(t) - r_3)dt$$

$$= \int_{r_3}^{r_m} 2\pi \cdot r \cdot L \cdot \rho_4 \cdot c_4 \, A_4(t_2) * (r_m(t_2) - r)^2 \cdot dr$$

$$- \int_{r_3}^{r_m} 2\pi \cdot r \cdot L \cdot \rho_4 \cdot c_4 \, A_4(t_1) * (r_m(t_1) - r)^2 \cdot dr$$

Muss noch fertig gestellt werden.