> Integralverfahren zur Erstellung der Temperaturfunktionen in einer zylindrischen Hohlsäule und ihrer Umgebung

Gerhard Herres, 2025-02-19

> *restart* :

T1 ist die Temperaturverteilung in der zylindrischen, hohlen Säule, T2 ist die Temperaturverteilung im Bereich der Wärme abgebenden Behälter, T3 ist die Temperaturverteilung um die Säule herum. In der ringförmigen, hohlen Säule wird Wärme homogen freigesetzt. W0=21.6116 W/m³. Durchmesser der Säule ist Di=19.4 m, Da=43.4 m, Länge 800 m.

> $T1 := c0;\ T2 := c0 - c2\cdot(r-ri)^2;\ T3 := c3\cdot(r-r0)^2;$

$$T1 := c0$$

$$T2 := c0 - c2\,(r-ri)^2$$

$$T3 := c3\,(r-r0)^2 \tag{1}$$

Grenzbedingungen: 1. T2(Rs,t) = T3(Rs,t) ,   2. diff(T2(r,t),r) = diff(T3(r,t),r) bei r=Rs=9.7+12 m = 21.7 m

> $eq1 := subs(r=Rs, T2) = subs(r=Rs, T3);$

$$eq1 := c0 - c2\,(Rs-ri)^2 = c3\,(Rs-r0)^2 \tag{2}$$

> $eq2 := subs(r=Rs, diff(T2, r)) = subs(r=Rs, diff(T3, r));$

$$eq2 := -2\,c2\,(Rs-ri) = 2\,c3\,(Rs-r0) \tag{3}$$

> $Loes2u3 := solve(\{eq1, eq2\}, \{c2, c3\});$

$$Loes2u3 := \left\{c2 = \frac{c0}{(Rs-ri)\,(r0-ri)},\ c3 = -\frac{c0}{Rs\,r0 - r0^2 - Rs\,ri + ri\,r0}\right\} \tag{4}$$

> $C2 := rhs(Loes2u3[1]);\ C3 := normal(rhs(Loes2u3[2]));$

$$C2 := \frac{c0}{(Rs-ri)\,(r0-ri)}$$

$$C3 := -\frac{c0}{Rs\,r0 - r0^2 - Rs\,ri + ri\,r0} \tag{5}$$

> $C3 := -\dfrac{c0}{factor(Rs\,r0 - r0^2 - Rs\,ri + ri\,r0)};$

$$C3 := -\frac{c0}{(r0-ri)\,(Rs-r0)} \tag{6}$$

> $T2 := subs(c2=C2, T2);\ T3 := subs(c3=C3, T3);$

$$T2 := c0 - \frac{c0\,(r-ri)^2}{(Rs-ri)\,(r0-ri)}$$

$$T3 := -\frac{c0\,(r-r0)^2}{Rs\,r0 - r0^2 - Rs\,ri + ri\,r0} \tag{7}$$

>

> $Tg := piecewise(0 < r < ri, T1, ri < r < Rs, T2, Rs < r < r0, T3, r > r0, 0);$

$$Tg := \begin{cases} c0 & 0 < r \text{ and } r < ri \\ c0 - \dfrac{c0\,(r-ri)^2}{(Rs-ri)\,(r0-ri)} & ri < r \text{ and } r < Rs \\ -\dfrac{c0\,(r-r0)^2}{Rs\,r0 - r0^2 - Rs\,ri + ri\,r0} & Rs < r \text{ and } r < r0 \\ 0 & r0 < r \end{cases} \quad (8)$$

Die Wärmefreisetzung ist nicht ganz homogen, da die Behälter in strahlenförmig von der zentralen Säule
ausgehenden Bohrungen eingefüllt werden. Bei r = ri = 9.7 m liegen sie enger zusammen als bei r = Rs = 21.7 m.
Q0=pi*H*(Rs^2-ri^2)*21.61 W/m³

> $Q0 := \mathrm{Pi} * H * (Rs\text{^}2 - ri\text{^}2) * 21.61;$ # W/m³

$$Q0 := 21.61\,\pi\,H\left(Rs^2 - ri^2\right) \quad (9)$$

> $Q0z := evalf(subs(H = 800, Rs = 21.7, ri = 9.7, Q0));$

$$Q0z := 2.046470651\;10^7 \quad (10)$$

> $W1 := \dfrac{339.277}{r};\ \# \dfrac{W}{m3}$

$$W1 := \frac{339.277}{r} \quad (11)$$

> $Q1 := H \cdot int(W1 \cdot 2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot r, r = ri\,..Rs);$

$$Q1 := H\,(2131.740261\,Rs - 2131.740261\,ri) \quad (12)$$

> $Q1z := evalf(subs(H = 800, ri = 9.7, Rs = 21.7, Q1));$

$$Q1z := 2.046470651\;10^7 \quad (13)$$

Da die freigesetzte Wärme näher am Zentrum höher ist pro m³ wird dort die Temperatur
vermutlich höher sein, als in diesem Modell berechnet.Der Temperaturverlauf ist dann keine Parabel.
Außerdem fließt am Anfang Wärme nach innen in die wieder mit Salzgrus aufgefüllte zentrale Säule.
Wegen der geringeren Dichte wird die Wärmeleitfähigkeit kleiner sein, aber die Temperatur ist nicht
sofort 200 K über der Umgebungstemperatur.

>

Abfliessende Wärme bei r=Rs nach außen.

> $Qab := \mathrm{Q1z} \cdot \exp(-b \cdot t) = -2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot Rs \cdot H \cdot \mathrm{lambda} \cdot subs(r = Rs, diff(T2, r));$

$$Qab := 2.046470651\;10^7\,\mathrm{e}^{-b\,t} = \frac{4\,\pi\,Rs\,H\,\lambda\,c0}{r0 - ri} \quad (14)$$

Gesamte Wärme

Randbedingung: Integral über beide Bereiche bis zu r=r0 muss gleich sein der insgesamt freigesetzten Wärmemenge.

> $eq3 := H \cdot \mathrm{rho} \cdot cp \cdot (int(T1 \cdot 2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot r, r = 0\,..ri) + int(\mathrm{T2} \cdot 2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \mathrm{r}, \mathrm{r} = \mathrm{ri}\,..\mathrm{Rs}) + int(\mathrm{T3} \cdot 2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \mathrm{r}, \mathrm{r} = \mathrm{Rs}\,..r0)) = \mathrm{Q1z} \cdot int(\exp(-b \cdot t), t = 0\,..t0);$

$$eq3 := H\,\rho\,cp\left(c0\,\pi\,ri^2 - \frac{1}{2}\,\frac{c0\,\pi\,\left(Rs^4 - ri^4\right)}{(Rs-ri)\,(r0-ri)} + \frac{4}{3}\,\frac{c0\,ri\,\pi\,\left(Rs^3 - ri^3\right)}{(Rs-ri)\,(r0-ri)} + \left(c0\right.\right. \quad (15)$$

$$- \frac{c0\, ri^2}{(Rs-ri)\,(r0-ri)} \Bigg) \pi \left(Rs^2 - ri^2\right) - \frac{1}{2} \frac{c0\, \pi \left(r0^4 - Rs^4\right)}{Rs\, r0 - r0^2 - Rs\, ri + ri\, r0} + \frac{4}{3} \frac{c0\, r0\, \pi \left(r0^3 - Rs^3\right)}{Rs\, r0 - r0^2 - Rs\, ri + ri\, r0} - \frac{c0\, r0^2\, \pi \left(r0^2 - Rs^2\right)}{Rs\, r0 - r0^2 - Rs\, ri + ri\, r0} \Bigg) = - \frac{2.046470651\ 10^7 \left(-1 + e^{-b\, t0}\right)}{b}$$

> eq3 := normal(lhs(eq3)) = rhs(eq3);

$$eq3 := \frac{1}{6} \left(Rs^2 + Rs\, r0 + Rs\, ri + r0^2 + ri\, r0 + ri^2\right) \pi\, c0\, H\, \rho\, cp = - \frac{2.046470651\ 10^7 \left(-1 + e^{-b\, t0}\right)}{b} \tag{16}$$

> C0 := solve(Qab, c0);

$$C0 := \frac{1.628529600\ 10^6\, e^{-1.\, b\, t} \left(r0 - 1.\, ri\right)}{Rs\, H\, \lambda} \tag{17}$$

> eq3a := subs(c0 = C0, t0 = t, eq3);

$$eq3a := \frac{2.714216000\ 10^5 \left(Rs^2 + Rs\, r0 + Rs\, ri + r0^2 + ri\, r0 + ri^2\right) \pi\, e^{-1.\, b\, t} \left(r0 - 1.\, ri\right) \rho\, cp}{Rs\, \lambda} = - \frac{2.046470651\ 10^7 \left(-1 + e^{-b\, t}\right)}{b} \tag{18}$$

> eq3b := normal(lhs(eq3a) - rhs(eq3a));

$$eq3b := \frac{1}{Rs\, \lambda\, b} \big(2.714216000\ 10^5\, \pi\, e^{-1.\, b\, t} \rho\, cp\, b\, Rs^2\, r0 - 2.714216000\ 10^5\, \pi\, e^{-1.\, b\, t} \rho\, cp\, b\, Rs^2\, ri + 2.714216000\ 10^5\, \pi\, e^{-1.\, b\, t} \rho\, cp\, b\, r0^2\, Rs - 2.714216000\ 10^5\, \pi\, e^{-1.\, b\, t} \rho\, cp\, b\, Rs\, ri^2 + 2.714216000\ 10^5\, \pi\, e^{-1.\, b\, t} \rho\, cp\, b\, r0^3 - 2.714216000\ 10^5\, \pi\, e^{-1.\, b\, t} \rho\, cp\, b\, ri^3 - 2.046470651\ 10^7\, Rs\, \lambda + 2.046470651\ 10^7\, Rs\, \lambda\, e^{-b\, t}\big) \tag{19}$$

> tg := solve(eq3b, t);

$$tg := - \frac{1}{b} \Big(1.\, \ln\big(\left(2.046470651\ 10^9\, Rs\, \lambda\right) / \left(8.526961046\ 10^7\, \rho\, cp\, b\, Rs^2\, r0 - 8.526961046\ 10^7\, \rho\, cp\, b\, Rs^2\, ri + 8.526961046\ 10^7\, \rho\, cp\, b\, r0^2\, Rs - 8.526961046\ 10^7\, \rho\, cp\, b\, Rs\, ri^2 + 8.526961046\ 10^7\, \rho\, cp\, b\, r0^3 - 8.526961046\ 10^7\, \rho\, cp\, b\, ri^3 + 2.046470651\ 10^9\, Rs\, \lambda\right)\big)\Big) \tag{20}$$

tg ist die Zeit *bei der die Wärme im Außenbereich bis r = r0 vorgedrungen ist.*

> C0g := evalf(simplify(subs(t = tg, C0)));

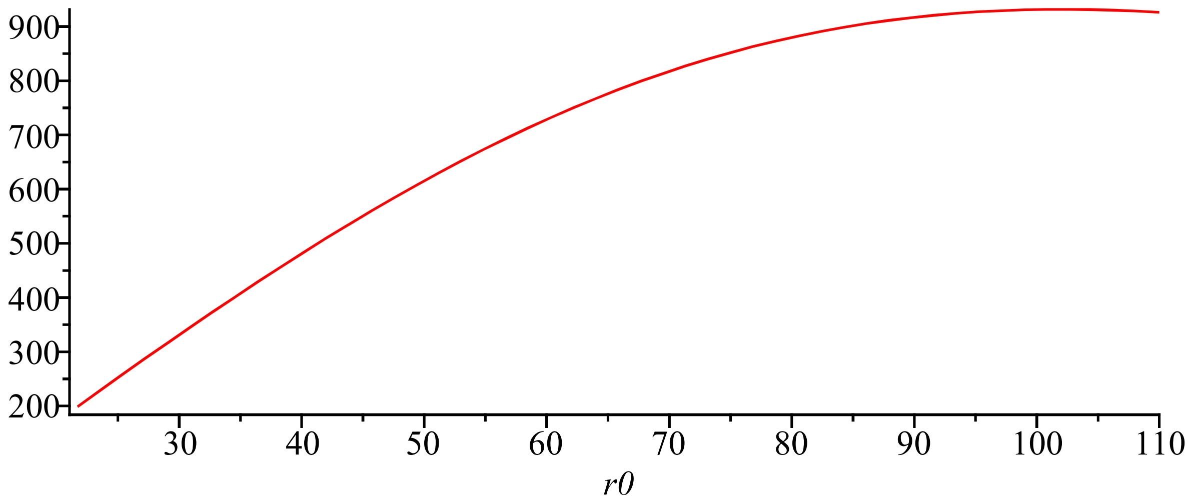
$$C0g := \left(1.666369018\ 10^{17} \left(r0 - 1.\, ri\right)\right) / \Big(\big(4.263480523\ 10^9\, \rho\, cp\, b\, Rs^2\, r0 - 4.263480523\ 10^9\, \rho\, cp\, b\, Rs^2\, ri + 4.263480523\ 10^9\, \rho\, cp\, b\, r0^2\, Rs - 4.263480523\ 10^9\, \rho\, cp\, b\, Rs\, ri^2 + 4.263480523\ 10^9\, \rho\, cp\, b\, r0^3 - 4.263480523\ 10^9\, \rho\, cp\, b\, ri^3 + 1.023235326\ 10^{11}\, Rs\, \lambda\big)\, H\Big) \tag{21}$$

C0g ist die maximale Temperatur in der Mitte der Säule, wenn die Wärme r0 erreicht hat.

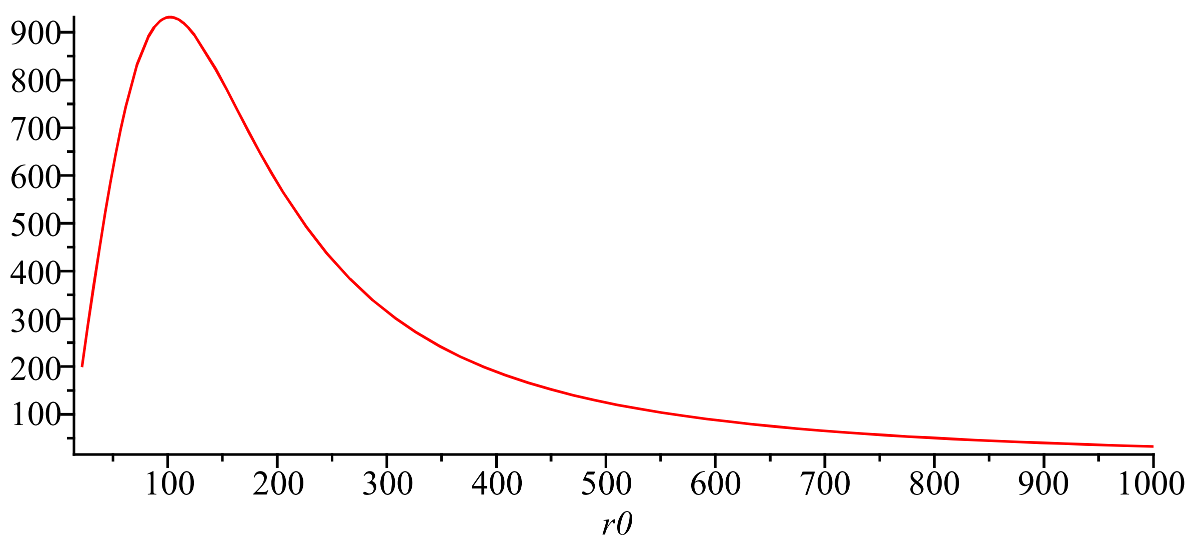
> $C0G := evalf(subs(\text{rho}=2200, cp=1200, b=5.48849845\text{e}-10, H=800, Rs=21.7, ri=9.7, \text{lambda}=5.6, C0g));$

$$C0G := \frac{2.082961272\ 10^{14}\ (r0-9.7)}{2.908983272\ 10^{9}\ r0 + 1.238788720\ 10^{13} + 1.340545286\ 10^{8}\ r0^{2} + 6.177628048\ 10^{6}\ r0^{3}} \quad \textbf{(22)}$$

> $plot(C0G, r0=21.7..110);$



> $plot(C0G, r0=21.7..1000);$



> $r0gmax := solve(diff(C0G, r0)=0, r0);$

$$r0gmax := 102.1215735, -49.21078674 + 86.13230762\ I, -49.21078674 - 86.13230762\ I \quad \textbf{(23)}$$

Bei r0 = 102.12 m ist die Temperatur in der Mitte maximal.

> $C0gmax := subs(r0=r0gmax[1], C0G);$

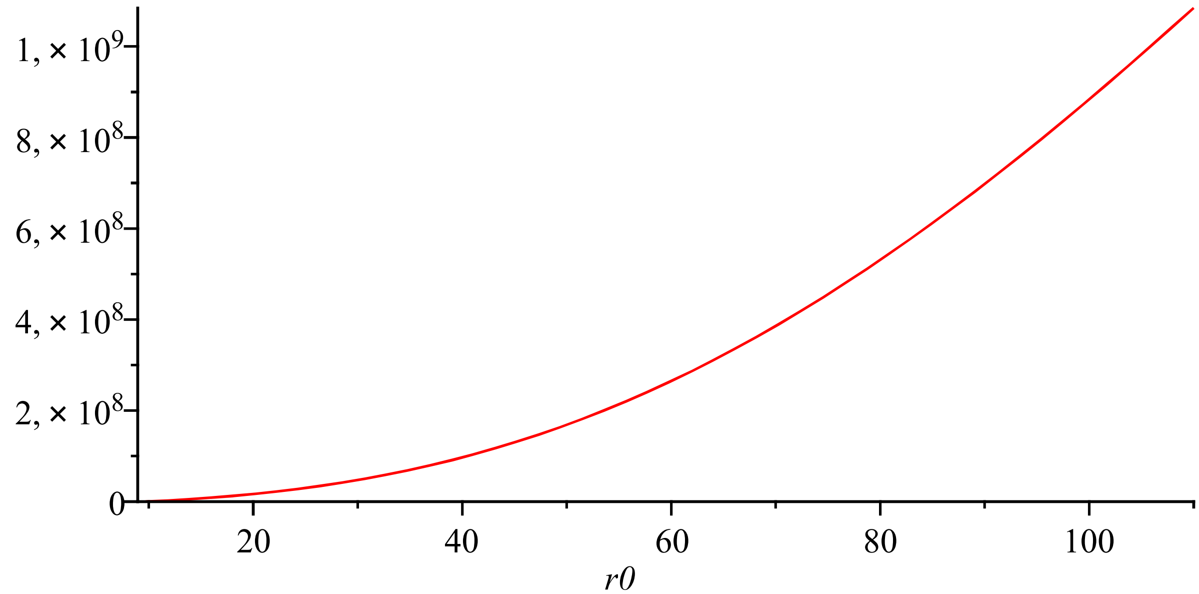
$$C0gmax := 931.7038570 \quad \textbf{(24)}$$

> $TG := subs(\text{rho}=2200, cp=1200, b=5.48849845\text{e}-10, Rs=21.7, ri=9.7, \text{lambda}=5.6, tg);$

$TG :=$ **(25)**

$-1.821991951\ 10^{9} \ln\left((2.486871135\ 10^{11}) / (5.817966545\ 10^{7}\ r0 + 2.477577438\ 10^{11} + 2.681090574\ 10^{6}\ r0^{2} + 1.235525610\ 10^{5}\ r0^{3}) \right)$

> plot(TG, r0 = 9.7 ..110);



> TGmax := evalf(subs(r0 = r0gmax[1], TG));

$$TGmax := 9.252856977\ 10^{8} \quad \textbf{(26)}$$

Die maximale Temperatur tritt nach 9.2529E8 Sekunden = 29.32 Jahren ein und beträgt 931.7 K über der Anfangstemperatur.

> with(plots);

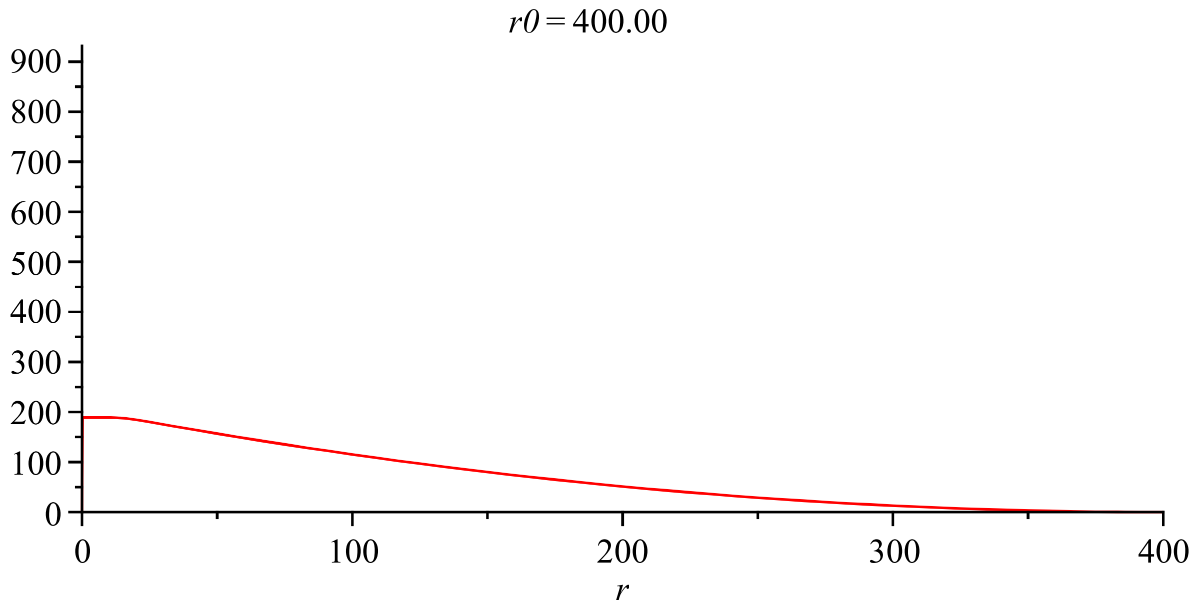
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot] **(27)**

> Tg0 := subs(ri = 9.7, Rs = 21.7, c0 = C0G, Tg);

$$Tg0 := \begin{cases} \dfrac{2.082961272\ 10^{14}\ (r0 - 9.7}{2.908983272\ 10^{9}\ r0 + 1.238788720\ 10^{13} + 1.340545286} \\ \dfrac{2.082961272\ 10^{14}\ (r0 - 9.7)}{2.908983272\ 10^{9}\ r0 + 1.238788720\ 10^{13} + 1.340545286\ 10^{8}\ r0^{2} + 6.177628048\ 10^{6}\ r0^{3}} - \dfrac{}{2.9089832} \\ -\dfrac{2.082961272\ 10^{14}\ (r0 - 9.7)\ (r}{(2.908983272\ 10^{9}\ r0 + 1.238788720\ 10^{13} + 1.340545286\ 10^{8}\ r0^{2} + 6.} \\ 0 \end{cases}$$

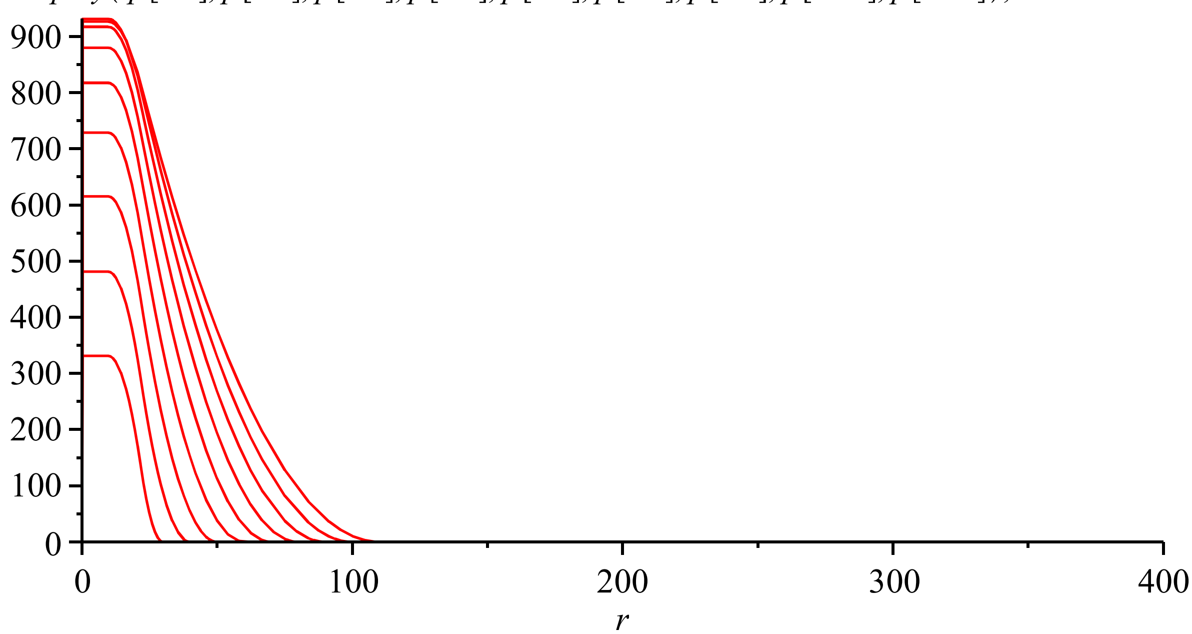
>

> *animate*(*plot* , [*Tg0*, $r = 0..400$] , $r0 = 21.7..400$);

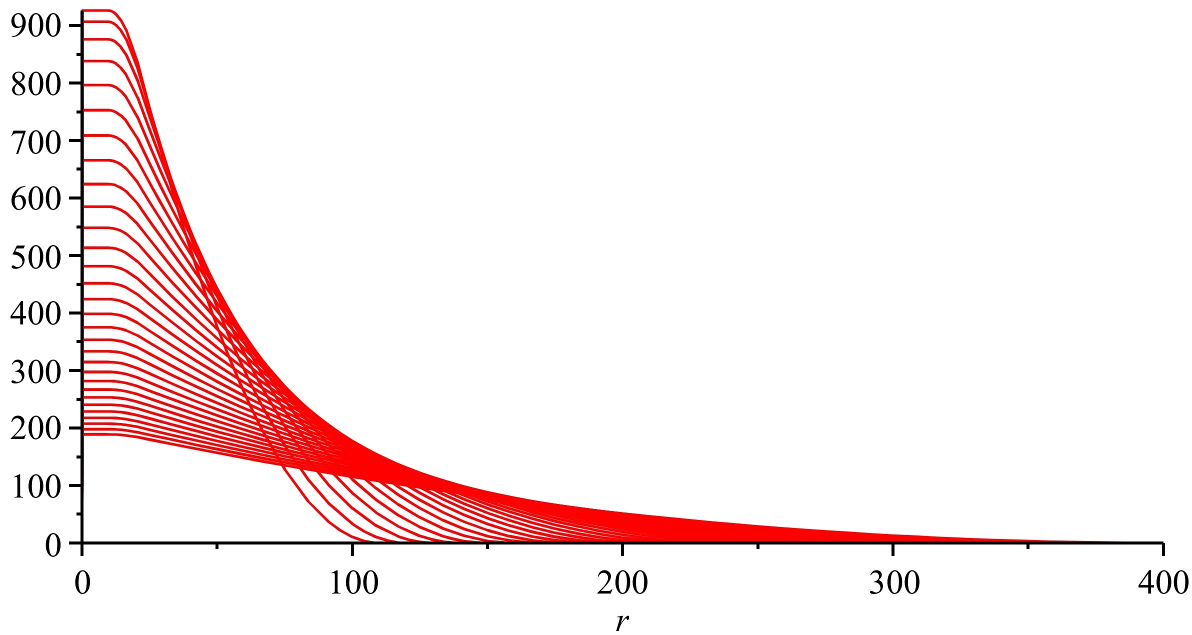


> **for** *k* **from** 30 **by** 10 **to** 400 **do**
p[*k*] := *plot*(*subs*(*r0* = *k*, *Tg0*), *r* = 0 ..400) :
end do:

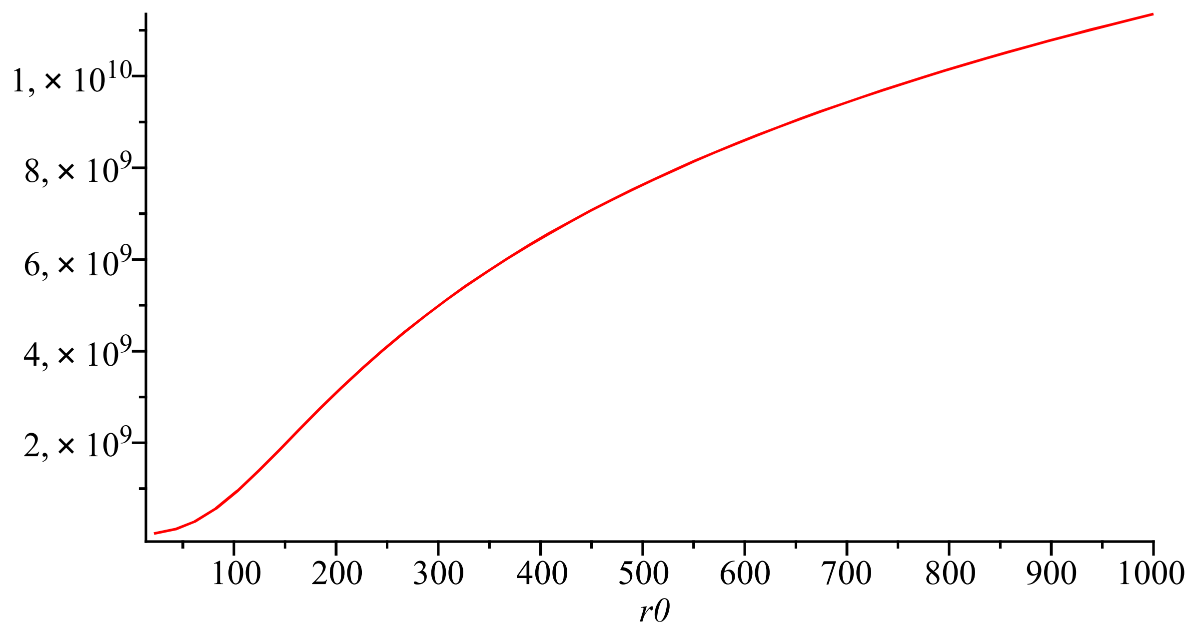
> *display*(*p*[30], *p*[40], *p*[50], *p*[60], *p*[70], *p*[80], *p*[90], *p*[100], *p*[110]);



> *display*(*p*[110], *p*[120], *p*[130], *p*[140], *p*[150], *p*[160], *p*[170], *p*[180], *p*[190], *p*[200],
p[210], *p*[220], *p*[230], *p*[240], *p*[250], *p*[260], *p*[270], *p*[280], *p*[290], *p*[300],
p[310], *p*[320], *p*[330], *p*[340], *p*[350], *p*[360], *p*[370], *p*[380], *p*[390], *p*[400]);



> $plot(TG, r0 = 21.7 ..1000);$



>