

# Temperaturfunktion über und unter einer beheizten Ebene mit radioaktivem Müll

Gerhard Herres, 2026-05-14

In einem Bauwerk ART-TEL 2.0 für die Endlagerung nuklearer Reststoffe, Atommüll und HLW nach dem Vorschlag von Ing. Goebel werden in einer Tiefe von 700 m horizontale Bohrungen mit  $D = 16,4$  m Durchmesser angelegt. Von diesen Röhren gehen unter  $45^\circ$  zahlreiche Bohrungen nach unten. Ihre Länge beträgt 337 m, wobei die ersten 10 m nicht mit Behältern befüllt werden. Die Behälter liegen in einem Abstand von 1,314 m in den Bohrungen und zwischen den Bohrungen und geben zu Beginn jeweils 4,31 W Wärme ab. Die Wärmeleistung beträgt  $q_0 = 4,31 \text{ W} / 1,314^2 \text{ m}^2 = 2,4962 \text{ W/m}^2$ . Da die Wärme zu beiden Seiten der Ebene der Bohrungen weg fließt, ist die Rechnung so, dass die Wärmediffusion in den halbunendlichen Raum mit  $q_0 = 1,2481 \text{ W/m}^2$  als Randbedingung erfolgt mit einer exponentiellen zeitlichen Abnahme, die dem radioaktiven Zerfall entspricht.  $q = q_0 * \exp(-b*t)$ . Die Wärmeleistung aller fast 19 Mill. Behälter beträgt 81,68 MW.

Für die Wärmediffusion gilt die Differentialgleichung:  $\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = a * \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$

mit der Randbedingung:  $-\lambda * \frac{\partial}{\partial x} T(x=0, t) = q(t) = q_0 * \exp(-b*t)$

Die Lösung erfolgt am besten mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$s * L(T(x, t), t, s) - T(x, 0) = a * \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(T(x, t), t, s) \right)$$

Setzt man  $T(x, 0) = 0$ , so lautet die Lösung

$$U(x, s) = \exp\left(\frac{\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right) * F_2(s) + \exp\left(\frac{-\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right) * F_1(s)$$

Weil die Lösung bei  $x \rightarrow$  unendlich begrenzt sein muss, folgt  $F_2(s) = 0$ .

Die Randbedingung ergibt transformiert  $-\lambda * \frac{\partial}{\partial x} U(x, s) = \frac{q_0}{s+b}$ .

Die Ableitung der Lösung  $U(x, s)$  ergibt:  $-\lambda * \frac{\partial}{\partial x} F_1(s) * \exp\left(\frac{-\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right) = \frac{q_0}{s+b}$

Daraus folgt am Rand  $x = 0$ :  $F_1(s) = \frac{q_0 * \exp(0) * \sqrt{(a)}}{\sqrt{(s)} * \lambda * (s+b)}$

Somit ist die Laplace-transformierte der Lösung:  $U(x, s) = \left( \frac{q_0 * \sqrt{(a)}}{\sqrt{(s)} * \lambda * (s+b)} \right) * \exp\left(\frac{-\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right)$

Mit den Abkürzungen  $C = (q_0 * \sqrt{a} / \lambda)$  und  $k = x / \sqrt{a}$  lautet  $U(x, s) = C * \frac{\exp(-\sqrt{(s)} * k)}{\sqrt{(s)} * (s+b)}$

Um die inverse Laplace-Transformation von  $F(s) = \frac{\exp(-k * \sqrt{(s)})}{(s+b) * \sqrt{(s)}}$

zu bestimmen, nutzen wir die Eigenschaft der Faltung und bekannte Korrespondenzen aus der Laplace-Tabelle.

## Schritt 1: Identifizierung der Komponenten

Wir können  $F(s)$  als Produkt zweier Funktionen  $G(s)$  und  $H(s)$  schreiben:

$$G(s) = \frac{\exp(-k\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \quad \text{und} \quad H(s) = \frac{1}{s+b}$$

## Schritt 2: Inverse Laplace-Transformation der Einzelteile

Aus den Standardtabellen der Laplace-Transformation wissen wir:

$$L^{-1}(G(s)) = L^{-1}\left(\frac{\exp(-k\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) = g(t)$$

$$L^{-1}(H(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+b}\right) = \exp(-b*t) = h(t)$$

## Schritt 3: Anwendung des Faltungssatzes

Der Faltungssatz besagt:  $L^{-1}(G(s)*H(s)) = (g*h)(t) = \int_0^t g(\tau)*h(t-\tau) d\tau$

Setzen wir unsere Funktionen ein:

$$f(t) = (g*h)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(\pi*\tau)}} * \exp\left(-\frac{k^2}{4*\tau}\right) * \exp(-b*(t-\tau)) d\tau$$

Ziehen wir die Konstante  $\exp(-b*t)$  aus dem Integral heraus:

$$f(t) = \frac{\exp(-b*t)}{\sqrt{(\pi)}} * \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(\tau)}} * \exp\left(-\frac{k^2}{4*\tau} + b*\tau\right) d\tau$$

## Schritt 4: Lösung des Integrals

Um dieses Integral zu lösen, führt man eine Substitution durch (typischerweise  $u = \sqrt{(\tau)}$ , mit

$$du = \frac{1}{2*\sqrt{(\tau)}} d\tau \quad ) \quad f(t) = \frac{2*\exp(-b*t)}{\sqrt{(\pi)}} * \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4*u^2} + b*u^2\right) du \quad .$$

Der Exponent im Integral kann aufgelöst werden

$$-\frac{k^2}{4*u^2} + b*u^2 = -\left(\frac{k}{2*u} + \sqrt{b}*u\right) * \left(\frac{k}{2*u} - \sqrt{b}*u\right) = -\left(\frac{k}{2*\sqrt{(\tau)}} + \sqrt{b*\tau}\right) * \left(\frac{k}{2*\sqrt{(\tau)}} - \sqrt{b*\tau}\right)$$

Nach Anwendung der Standard-Integrale mit partieller Integration für diese spezifische Form erhält man das Ergebnis unter Verwendung der Fehlerfunktion  $\text{erf}(z)$  oder der komplementären Fehlerfunktion  $\text{erfc}(z)$ . VORSICHT bei der Verwendung künstlicher Intelligenz. 3 Versuche brachten 3 verschiedene falsche Ergebnisse.

Das Ergebnis lautet mit den Abkürzungen  $y = x*\sqrt{(b/a)}$  und  $\xi = x/\sqrt{(4*a*t)}$  :

$$f(t, x) = \frac{-I * \exp(-b*t)}{(2*\sqrt{(b)})} * (\exp(-I*y) * \text{erfc}(\xi - I*\sqrt{(b*t)}) - \exp(I*y) * \text{erfc}(\xi + I*\sqrt{(b*t)}))$$

Die gesamte Funktion  $u(s, x) = \frac{q_0*\sqrt{(a)}}{\lambda} * \exp\left(\frac{-\sqrt{(s/a)}*x}{(\sqrt{(s)}*(s+b))}\right)$  wird zurück transformiert zu

$$f(t, x) = \frac{-I*q_0*\exp(-b*t)}{2*\sqrt{(b/a)}*\lambda} * (\exp(-I*y) * \text{erfc}(\xi - I*\sqrt{b*t}) - \exp(I*y) * \text{erfc}(\xi + I*\sqrt{b*t}))$$

mit  $y = x \cdot \sqrt{b/a}$  und  $\xi = x / \sqrt{4 \cdot a \cdot t}$

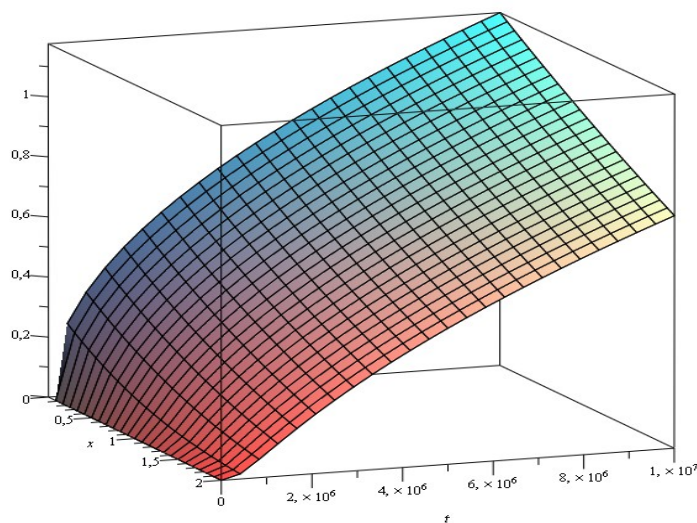
Die Stoffeigenschaften sind:

Zerfallsrate  $b = 4,588 \cdot 10^{-10} \text{ 1/s}$  Dichte des Salzes  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$   
 spez. Wärmekapazität  $c_p = 1200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$  Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 5,4 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$   
 Temperaturleitfähigkeit  $a = \lambda / (\rho \cdot c_p) = 2,045454546 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

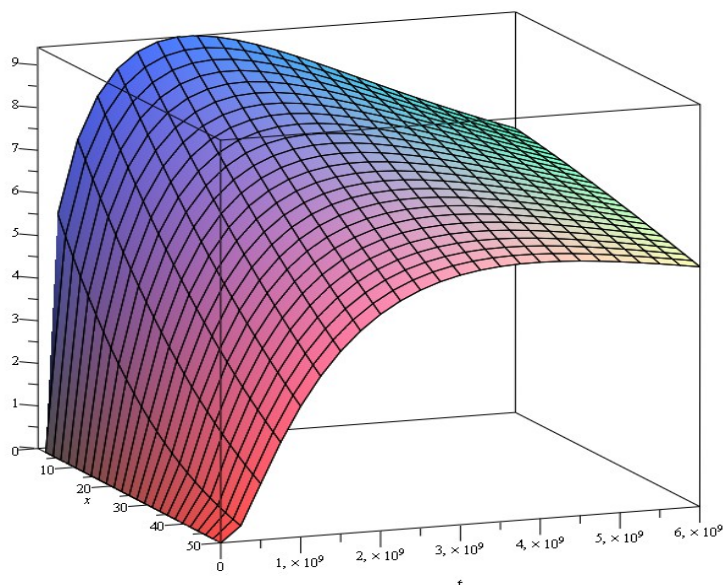
Damit folgt für die räumliche und zeitliche Temperaturverteilung:

$$f(x, t) = -I \cdot 7,71642253 \cdot \exp(-4,588 \cdot 10^{-10} \cdot t) \cdot \left( \exp(-I \cdot 0,01497672268 \cdot x) \cdot \operatorname{erfc}\left(349,6029494 \cdot x / \sqrt{t} - I \cdot 0,2141961718 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{t}\right) - \exp(I \cdot 0,01497672268 \cdot x) \cdot \operatorname{erfc}\left(349,6029494 \cdot x / \sqrt{t} + I \cdot 0,2141961718 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{t}\right) \right)$$

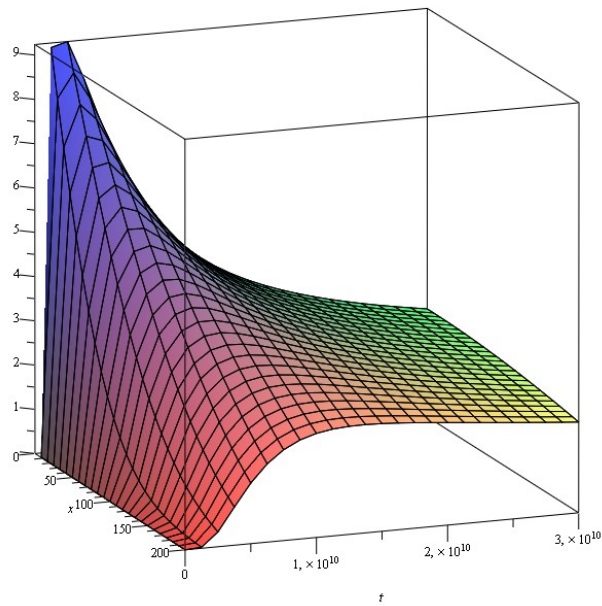
Temperaturfeld T in K, x in m, t in s bis 115 Tage



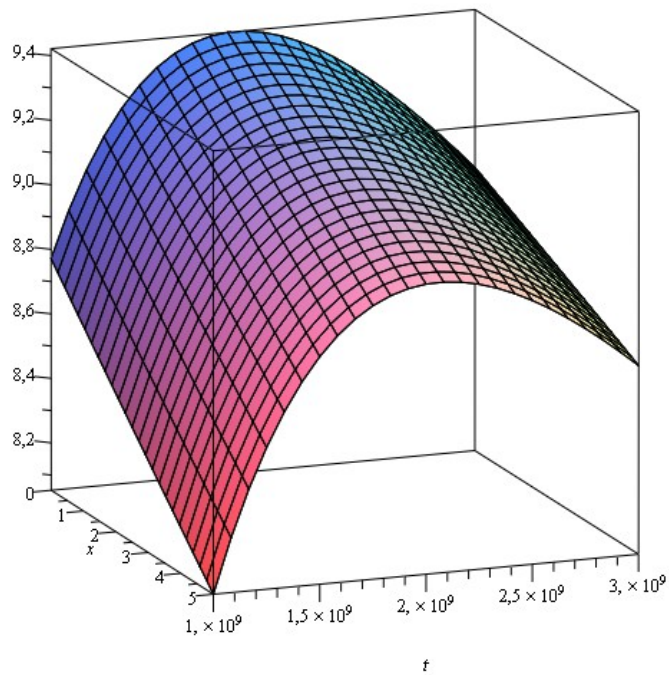
Temperaturfeld T in K, x in m, t in s bis 190 Jahre



Temperaturfeld T in K, x in m, t in s bis 950 Jahre

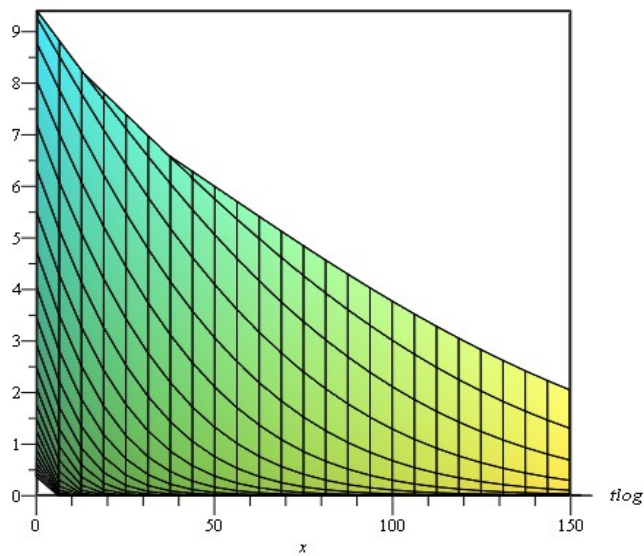


Temperaturfeld T in K, x in m, t in s Maximum bei 9,4 K nach 58,6 Jahren

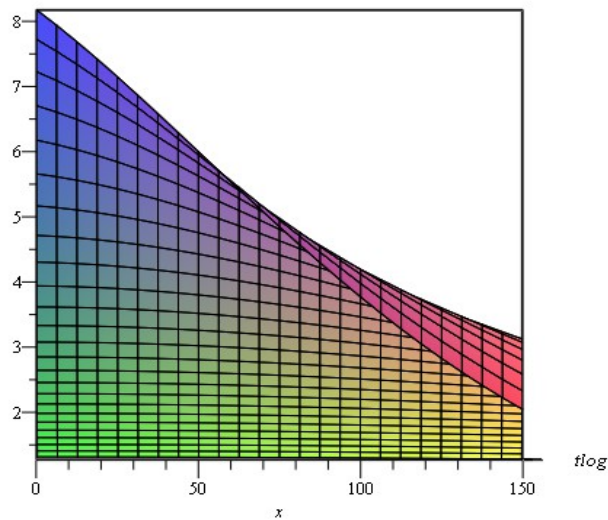


Die maximale Temperatur wird nach etwa 58,6 Jahren mit 9,4 K erreicht in der Ebene der Behälter, oberste Kurve. Die darunter liegenden Kurven stehen für größere Abstände bis 5 m von dieser Ebene.

Temperaturfeld T in K, x in m  $s = 10^6$  bis  $10^{9,6}$  s = 126,2 Jahre

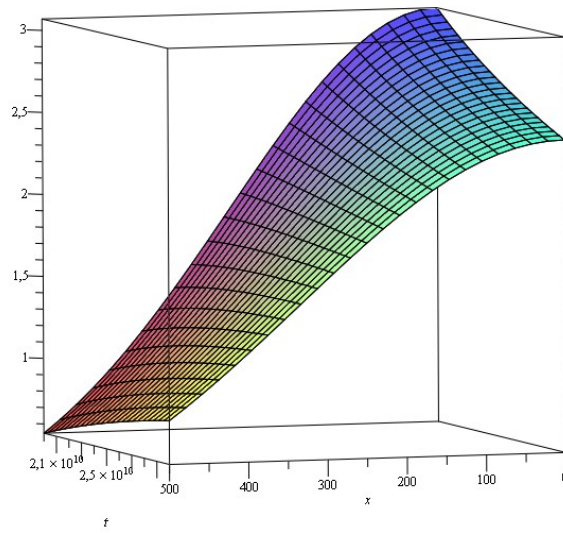


Temperaturfeld T in K, x in m  $s = 10^9,6$  bis  $10^{11}$  s = 3170 Jahre

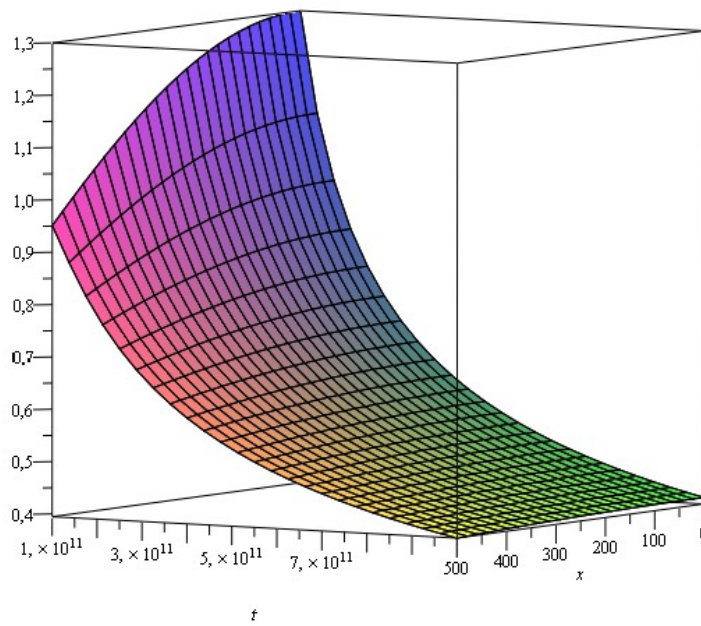


Die Temperatur steigt zuerst langsam bis sie nach 58,6 Jahren das Maximum erreicht, die Wärme dringt dann immer weiter in das Salz ein und die Temperatur fällt wieder. Nach 950 Jahren ist die Wärme fast gleichmäßig über die nächsten 500 m verteilt und die Temperatur beträgt etwa 2,4 K in der Heizebene und knapp 1,3 K in 500 m Entfernung.

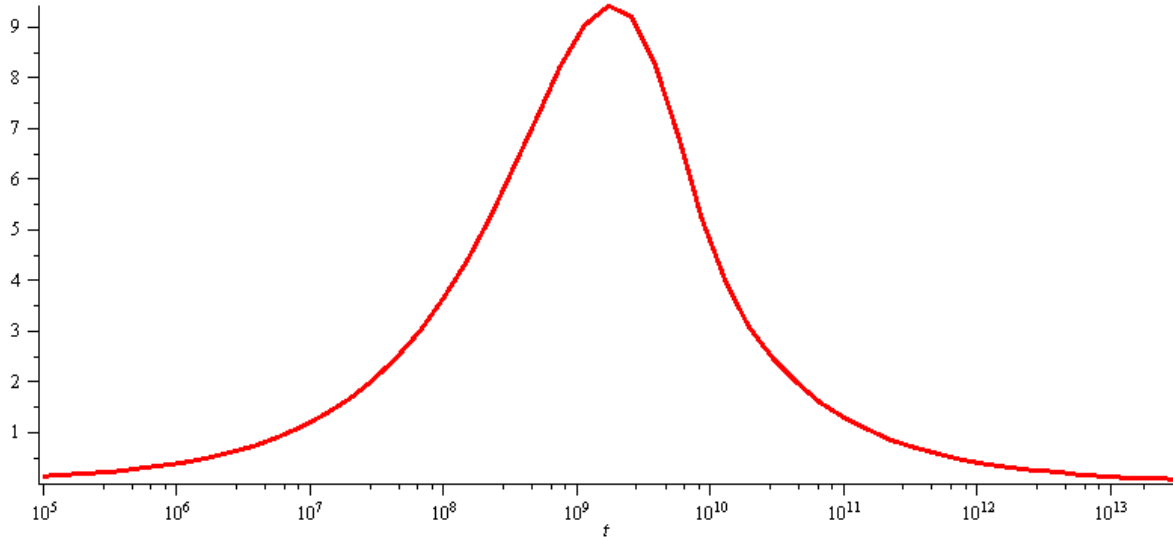
Temperaturfeld T in K, x in m, t in s bis 950 Jahre



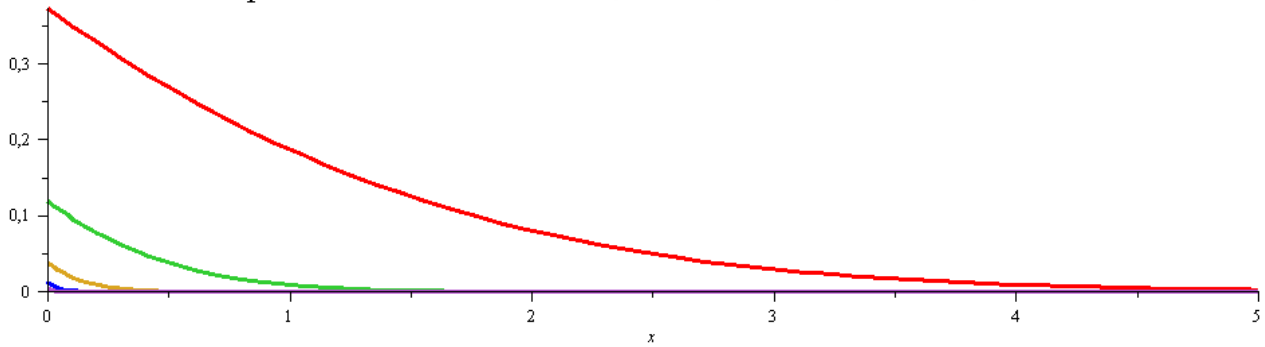
Temperaturfeld T in K, x in m, t in s bis 31688 Jahre



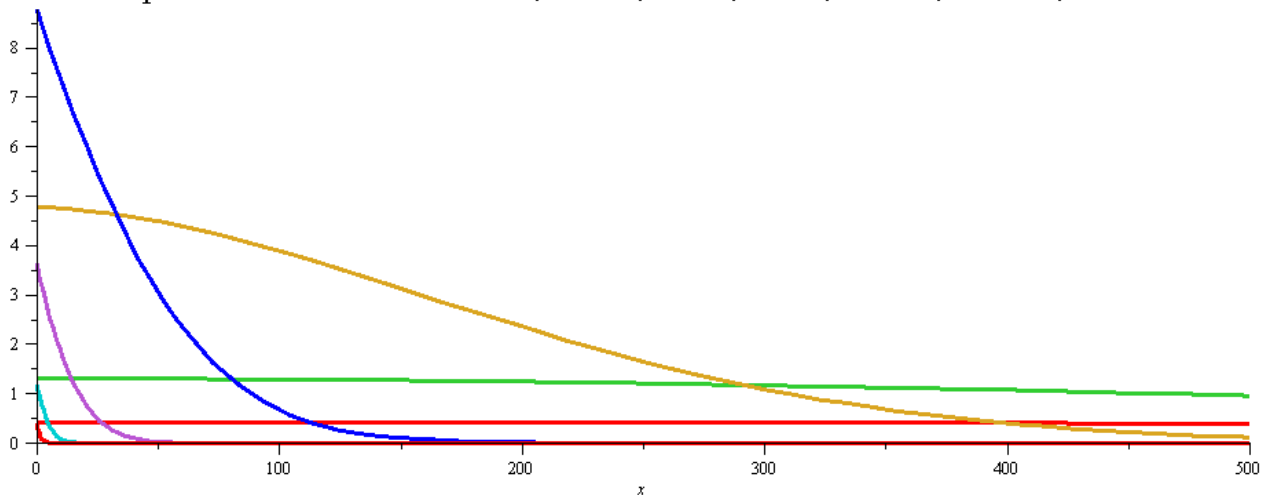
Temperaturverlauf in der Heizebene bis  $t = 950642$  Jahre



Temperaturverläufe für  $t = 100\text{s}, 1.000\text{s}, 10.000\text{s}, 100.000\text{s}, 10^6\text{ s}$



Temperaturverläufe für  $t = 10^6\text{s}, 10^7\text{s}, 10^8\text{s}, 10^9\text{s}, 10^{10}\text{s}, 10^{11}\text{s}, 10^{12}\text{s}$



Die eindringende Wärme läßt die Temperatur langsam steigen, bis nach ca.  $10^9\text{ s}$  die Wärmezufuhr zu gering ist, um in der Heizebene die Temperatur zu halten. Die Temperatur sinkt wieder und nach  $10^{12}\text{ s}$  ist die Wärme gleichmäßig verteilt und die Temperatur überall weniger als 0,5 K höher als zu Beginn.