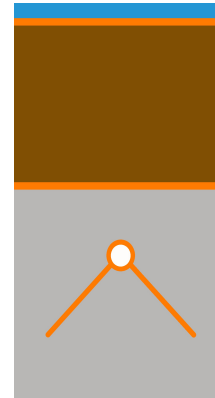


# Temperaturfunktion über und unter einer beheizten Ebene mit radioaktivem Müll

Gerhard Herres, 2026-06-02

In einem Bauwerk ART-TEL 2.1 für die Endlagerung nuklearer Reststoffe, Atommüll und HLW nach dem Vorschlag von Ing. Goebel werden in einer Tiefe von 700 m horizontale Bohrungen mit  $D = 16,4$  m Durchmesser angelegt. Von diesen Röhren gehen unter  $45^\circ$  zahlreiche Bohrungen nach unten. Ihre Länge beträgt 337 m, wobei die ersten 10 m nicht mit Behältern befüllt werden. Die Behälter liegen in einem Abstand von 1,314 m in den Bohrungen und zwischen den Bohrungen und geben zu Beginn jeweils 4,31 W Wärme ab. Die Wärmeleistung beträgt  $q_0 = 4,31 \text{ W} / 1,314^2 \text{ m}^2 = 2,4962 \text{ W/m}^2$ . Da die Wärme zu beiden Seiten der Ebene der Bohrungen weg fließt, ist die Rechnung so, dass die Wärmediffusion in den halbunendlichen Raum mit  $q_0 = 1,2481 \text{ W/m}^2$  als Randbedingung erfolgt mit einer exponentiellen zeitlichen Abnahme, die dem radioaktiven Zerfall entspricht.  $q = q_0 * \exp(-b*t)$ . Die Wärmeleistung aller fast 19 Mill. Behälter beträgt 81,68 MW.



Für die Wärmediffusion gilt die Differentialgleichung:  $\frac{\delta}{\delta t} T(x, t) = a * \frac{\delta^2}{\delta x^2} T(x, t)$

mit der Randbedingung:  $\lambda * \frac{\delta}{\delta x} T(x=0, t) = q(t) = q_0 * \exp(-b*t)$

Die Lösung erfolgt am besten mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$s * L(T(x, t), t, s) - T(x, 0) = a * \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} L(T(x, t), t, s) \right)$$

Setzt man  $T(x, 0) = 0$ , so lautet die Lösung

$$U(x, s) = \exp\left(\frac{\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right) * F_2(s) + \exp\left(\frac{-\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right) * F_1(s)$$

Weil die Lösung bei  $x \rightarrow$  unendlich begrenzt sein muss, folgt  $F_2(s) = 0$ .

Die Randbedingung ergibt transformiert  $-\lambda * \frac{\delta}{\delta x} U(x, s) = \frac{q_0}{s+b}$ .

Die Ableitung der Lösung  $U(x, s)$  ergibt:  $-\lambda * \frac{\delta}{\delta x} \exp\left(\frac{-\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right) * F_1(s) = \frac{q_0}{s+b}$

Daraus folgt am Rand  $x = 0$ :  $F_1(s) = \frac{q_0 * \exp(0) * \sqrt{(a)}}{\sqrt{(s)} * \lambda * (s+b)}$

Somit ist die Laplace-transformierte der Lösung:  $U(x, s) = \frac{q_0 * \sqrt{(a)}}{\sqrt{(s)} * \lambda * (s+b)} * \exp\left(\frac{-\sqrt{(s)} * x}{\sqrt{(a)}}\right)$

Mit den Abkürzungen  $C = (q_0 * \sqrt{a} / \lambda)$  und  $k = x / \sqrt{(a)}$  lautet  $U(x, s) = C * \frac{\exp(-\sqrt{(s)} * k)}{\sqrt{(s)} * (s+b)}$

Um die inverse Laplace-Transformation von  $F(s) = \frac{\exp(-k * \sqrt{(s)})}{(s+b) * \sqrt{(s)}}$  zu bestimmen, nutzen wir die Eigenschaft der Faltung und bekannte Korrespondenzen aus der Laplace-Tabelle.

## Schritt 1: Identifizierung der Komponenten

Wir können  $F(s)$  als Produkt zweier Funktionen  $G(s)$  und  $H(s)$  schreiben:

$$G(s) = \frac{\exp(-k\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \quad \text{und} \quad H(s) = \frac{1}{s+b}$$

## Schritt 2: Inverse Laplace-Transformation der Einzelteile

Aus den Standardtabellen der Laplace-Transformation wissen wir:

$$L^{-1}(G(s)) = L^{-1}\left(\frac{\exp(-k\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) = g(t)$$

$$L^{-1}(H(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+b}\right) = \exp(-bt) = h(t)$$

## Schritt 3: Anwendung des Faltungssatzes

Der Faltungssatz besagt:  $L^{-1}(G(s)*H(s)) = (g*h)(t) = \int_0^t g(\tau)*h(t-\tau) d\tau$

Setzen wir unsere Funktionen ein:

$$f(t) = (g*h)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} * \exp\left(-\frac{k^2}{4\tau}\right) * \exp(-b(t-\tau)) d\tau$$

Ziehen wir die Konstante  $\exp(-bt)$  aus dem Integral heraus:

$$f(t) = \frac{\exp(-bt)}{\sqrt{\pi}} * \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} * \exp\left(-\frac{k^2}{4\tau} + b\tau\right) d\tau$$

## Schritt 4: Lösung des Integrals

Um dieses Integral zu lösen, führt man eine Substitution durch (typischerweise  $u = \sqrt{\tau}$  ,

mit  $du = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau$  )  $f(t) = \frac{2 * \exp(-bt)}{\sqrt{\pi}} * \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4u^2} + b u^2\right) du$  .

Der Exponent im Integral kann aufgelöst werden

$$-\frac{k^2}{4u^2} + b u^2 = -\left(\frac{k}{2u} + \sqrt{b}u\right) * \left(\frac{k}{2u} - \sqrt{b}u\right) = -\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{b\tau}\right) * \left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{b\tau}\right)$$

Nach Anwendung der Standard-Integrale mit partieller Integration für diese spezifische Form erhält man das Ergebnis unter Verwendung der Fehlerfunktion  $\text{erf}(z)$  oder der komplementären Fehlerfunktion  $\text{erfc}(z)$ . VORSICHT mit KI: 3 Versuche ergaben 3 unterschiedliche falsche Ergebnisse.

Das Ergebnis lautet mit den Abkürzungen  $y = x\sqrt{b/a}$  und  $\xi = x/\sqrt{4*at}$  :

$$f(t, x) = \frac{-I * \exp(-bt)}{2\sqrt{b}} * (\exp(-I*y) * \text{erfc}(\xi - I*\sqrt{b*at}) - \exp(I*y) * \text{erfc}(\xi + I*\sqrt{b*at}))$$

Die gesamte Funktion  $u(s, x) = \frac{q_0 * \sqrt{a}}{\lambda} * \exp\left(\frac{-\sqrt{s/a} * x}{(\sqrt{s} * (s+b))}\right)$  wird zurück transformiert zu

$$T(t, x) = \frac{-I * q_0 * \exp(-bt)}{2\sqrt{b/a} * \lambda} * (\exp(-I*y) * \text{erfc}(\xi - I*\sqrt{b*at}) - \exp(I*y) * \text{erfc}(\xi + I*\sqrt{b*at}))$$

mit  $y = x\sqrt{b/a}$  und  $\xi = x/\sqrt{4*at}$

Die Stoffeigenschaften sind:

Zerfallsrate	$b=4,588 \cdot 10^{-10} \text{ 1/s}$	Dichte des Salzes	$\rho=2200 \text{ kg/m}^3$
spez. Wärmekapazität	$c_p=1200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$	Wärmeleitfähigkeit	$\lambda=5,4 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$
Temperaturleitfähigkeit	$a=\lambda/(\rho \cdot c_p)=2,045454546 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$		

Damit folgt für die räumliche und zeitliche Temperaturverteilung:

$$T(x, t) = -I \cdot 7,71642253 \cdot \exp(-4,588 \cdot 10^{-10} \cdot t)$$

$$\cdot \left( \exp(-I \cdot 0,01497672268 \cdot x) \cdot \operatorname{erfc}\left(349,6029494 \cdot x / \sqrt{t} - I \cdot 0,2141961718 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{t}\right) - \exp(I \cdot 0,01497672268 \cdot x) \cdot \operatorname{erfc}\left(349,6029494 \cdot x / \sqrt{t} + I \cdot 0,2141961718 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{t}\right) \right)$$

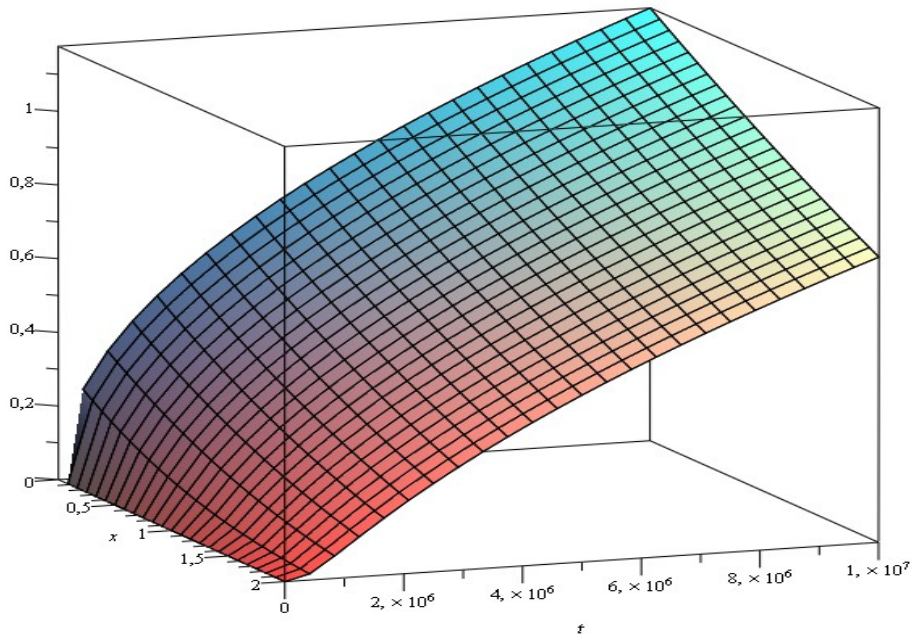


Abb. 1 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $t < 115$  Tage

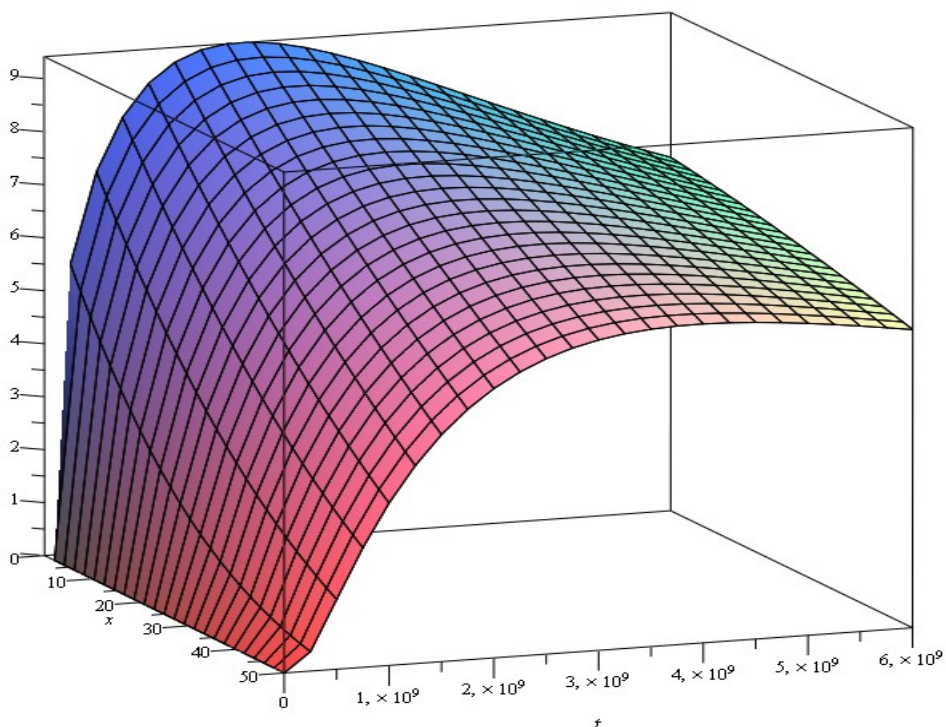


Abb. 2 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $t < 190$  Jahre

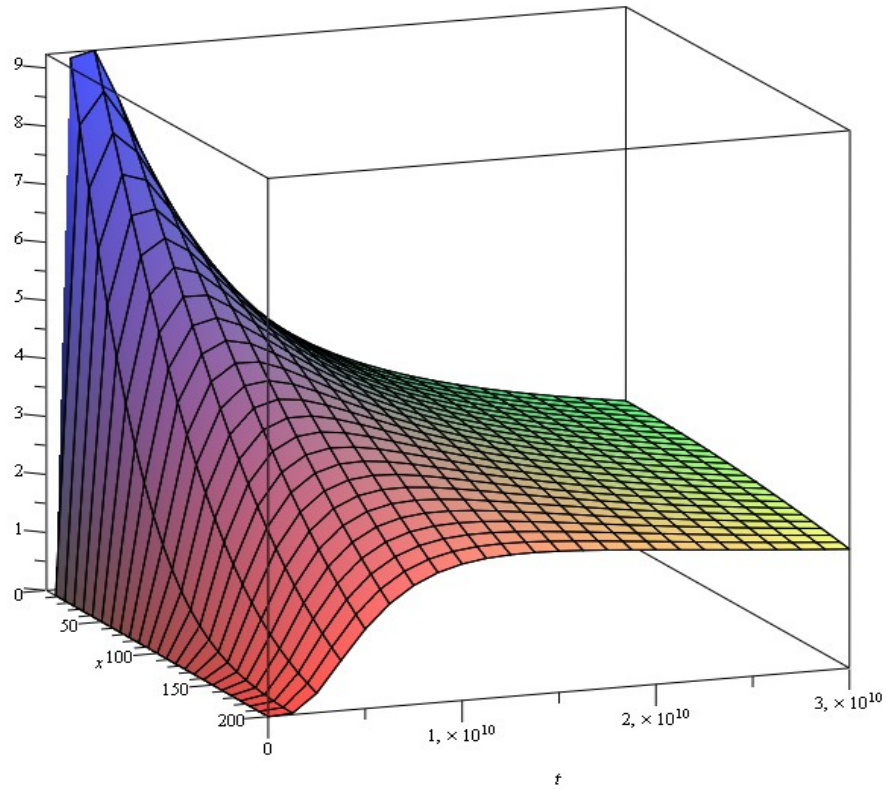


Abb. 3 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $t < 950$  Jahre

Nach 950 Jahren ist die Wärme fast gleichmäßig verteilt über den Bereich von 200 m und die Temperatur ist etwa 2,4 K in der Heizebene und knapp unter 1 K im Abstand von 500 m.

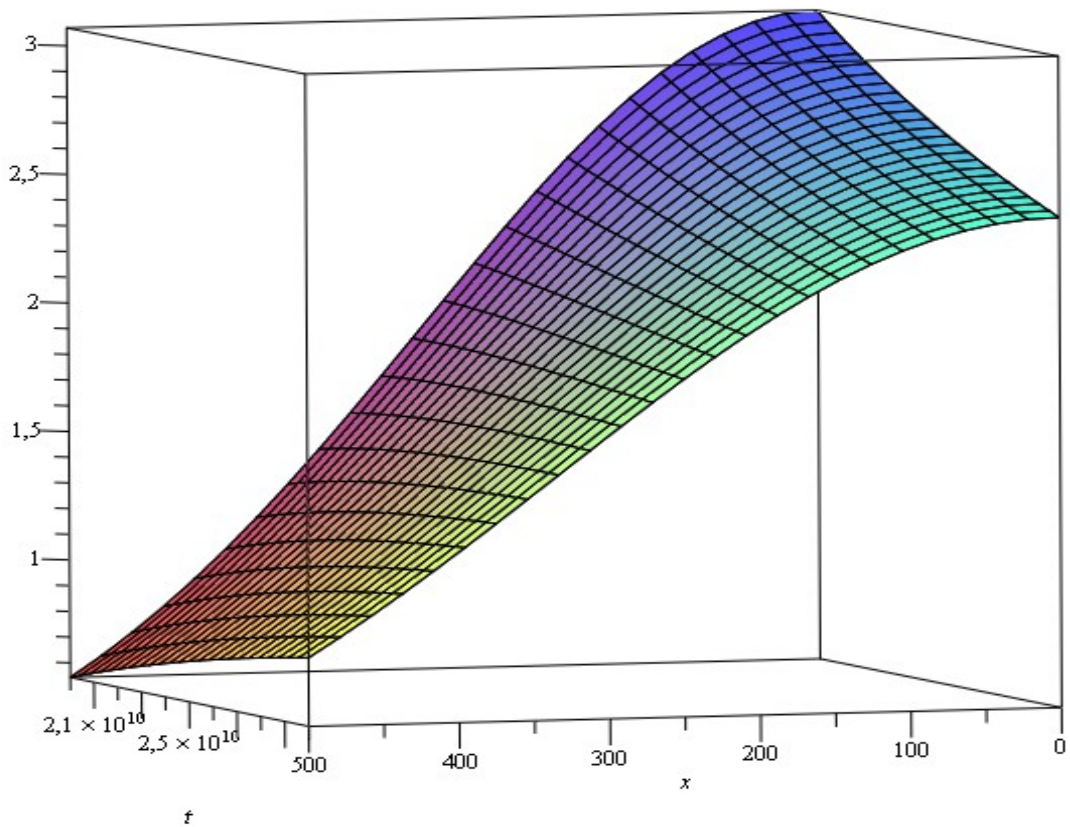


Abb. 4 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $t < 950$  Jahre

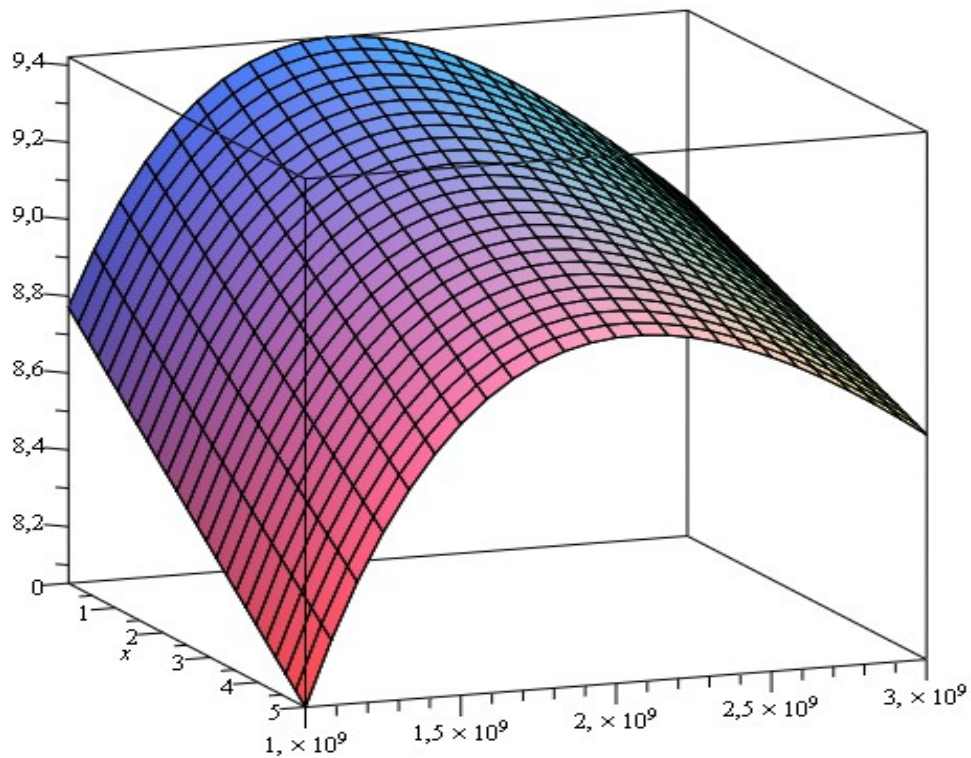


Abb. 5 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s, Maximum bei 9,4 K nach 58,6 Jahren

Die maximale Temperatur von 9,4 K wird nach ca. 58,6 Jahren erreicht in der Ebene der Container (oberste Linie). Die darunter liegenden Kurven stehen für größere Abstände bis 5 m von dieser Ebene.

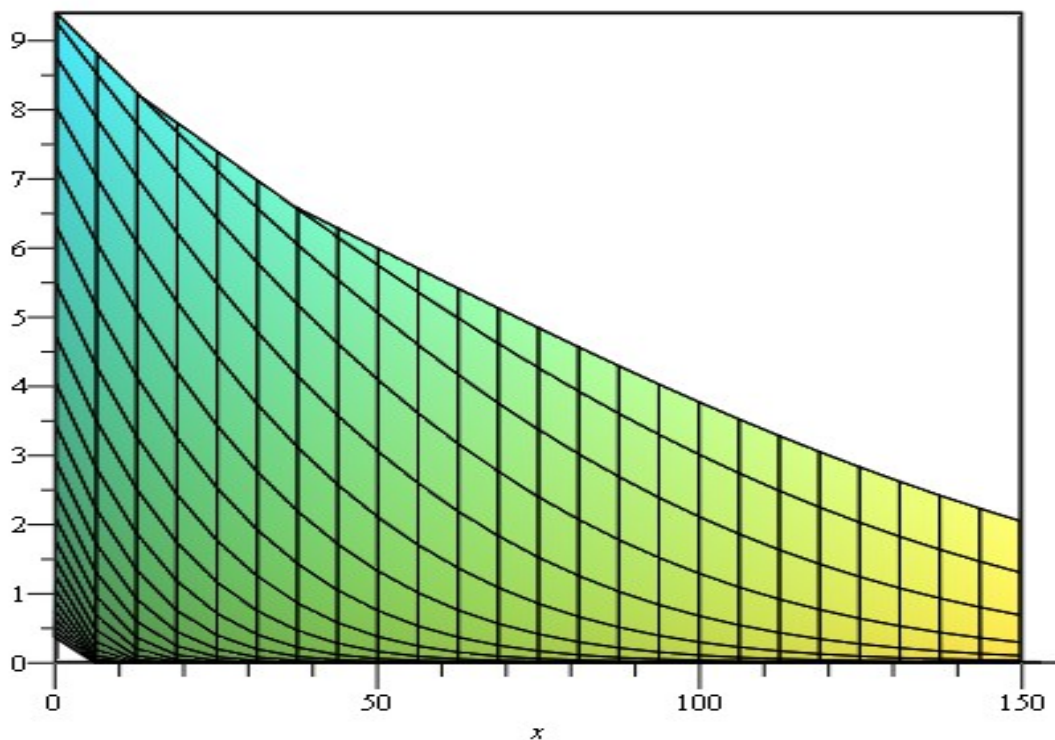


Abb. 6 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $10^6 \text{ s} < t < 10^{9.6} \text{ s} = 126.2 \text{ Jahre}$

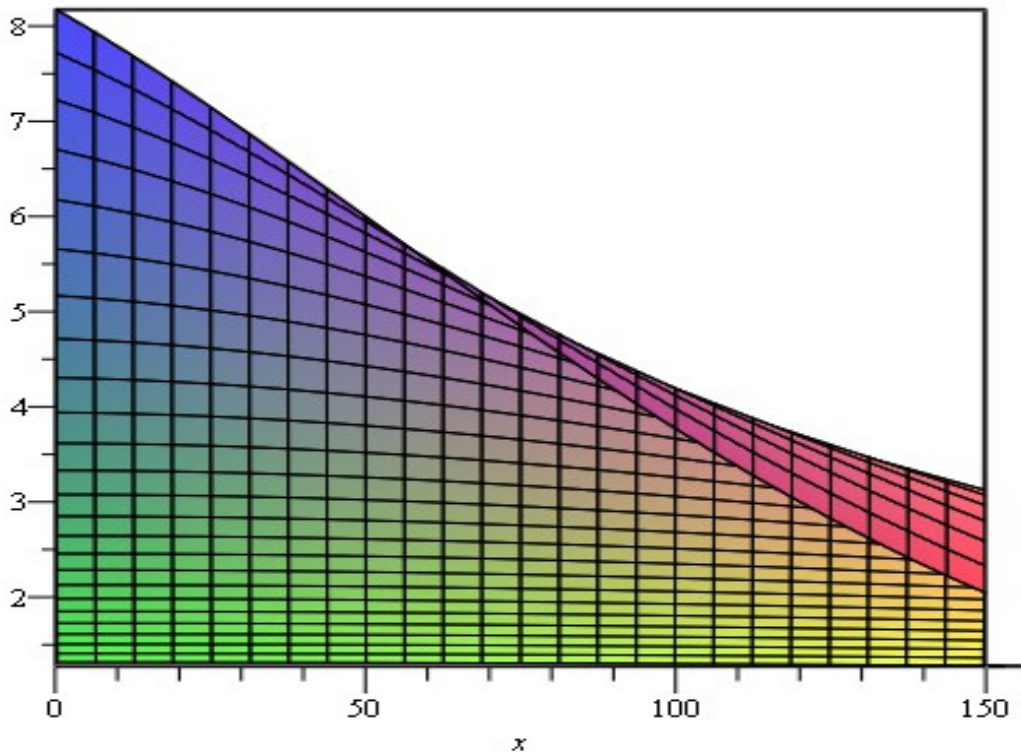


Abb. 7 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $10^{9.6} \text{ s} < t < 10^{11} \text{ s} = 3170 \text{ Jahre}$

Mit der Zeit ansteigende Linien. Nach 58,6 Jahren ist die höchste Linie erreicht. Im Bild 7 sind dann spätere Zeiten bis  $t = 10^{11} \text{ s} = 3170 \text{ Jahre}$  zu sehen. Die Wärme läuft immer weiter weg von der Heizebene und da immer weniger produziert wird, sinkt in der Heizebene die Temperatur.

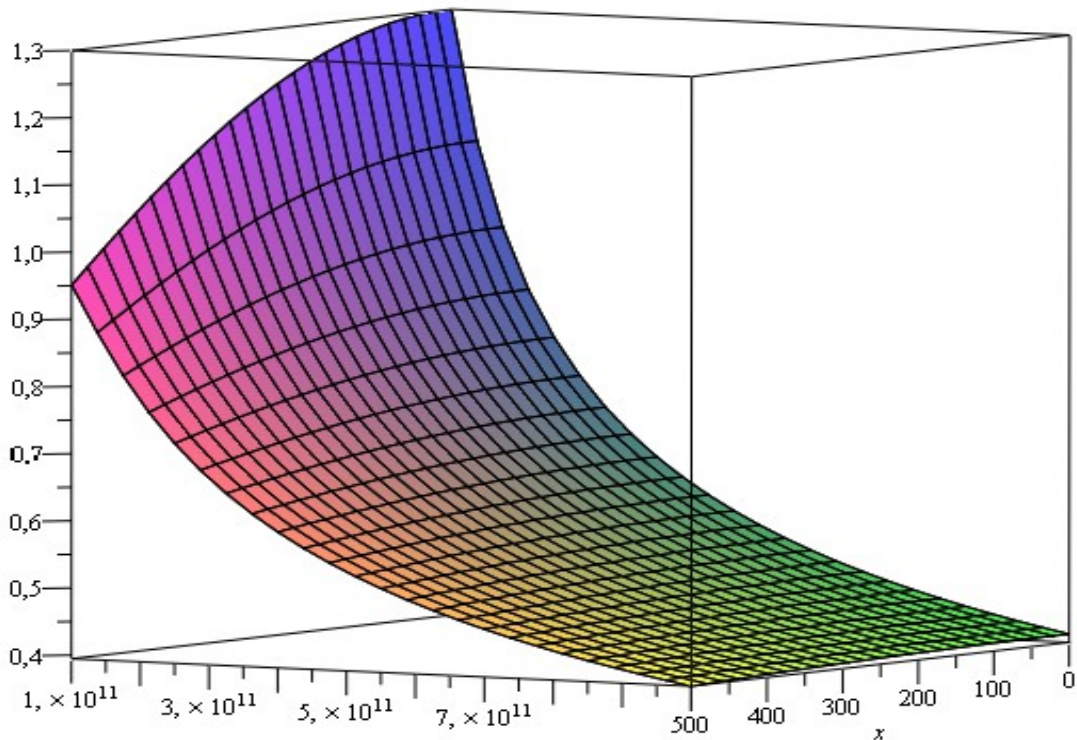


Abb. 8 Temperaturfeld T in K, Abstand x in m, Zeit t in s,  $10^{9.6} \text{ s} < t < 10^{12} \text{ s} = 31688 \text{ Jahre}$

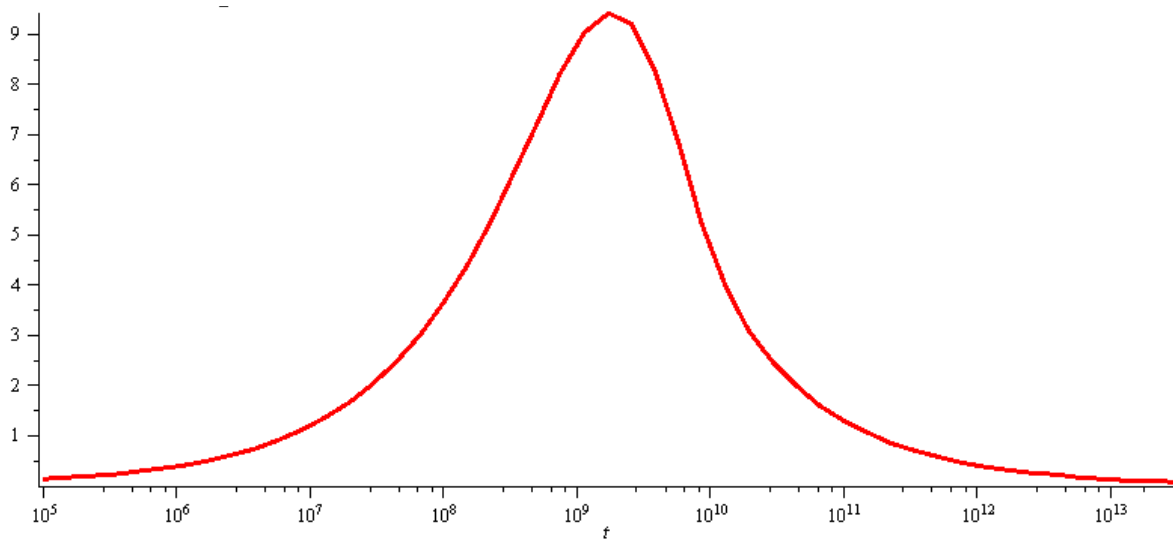


Abb. 9 Temperatur in der Behälterebene in K, Zeit  $10^5 \text{ s} = 1,16 \text{ Tage} < t < 3 \cdot 10^{13} \text{ s} = 950642 \text{ Jahre}$ , Maximum nach  $1.85 \cdot 10^9 \text{ s} = 58.6 \text{ Jahren}$

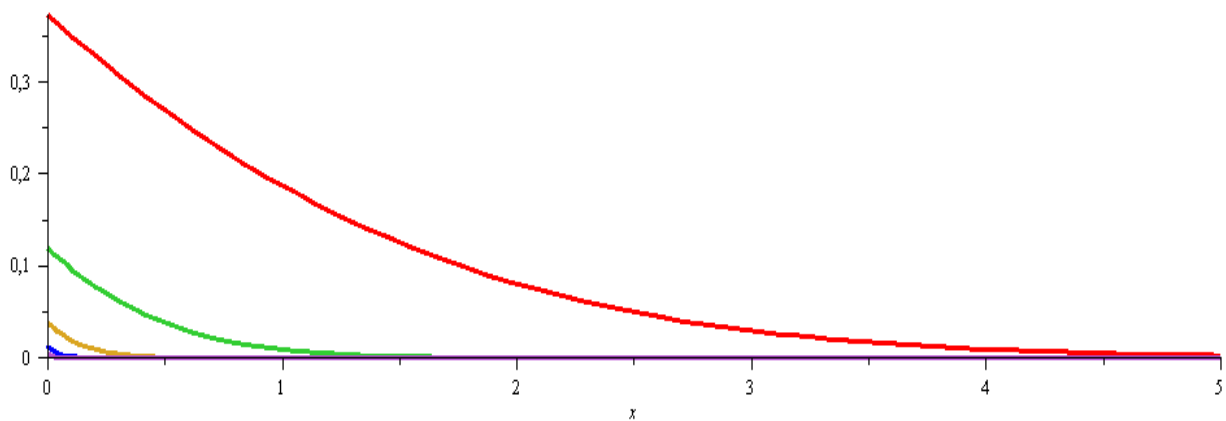


Abb. 10 Temperatur in K im Abstand  $x < 5 \text{ m}$ , Zeit  $t = 1000 \text{ s}, 10^4 \text{ s}, 10^5 \text{ s}, 10^6 \text{ s} = 11.6 \text{ Tage}$

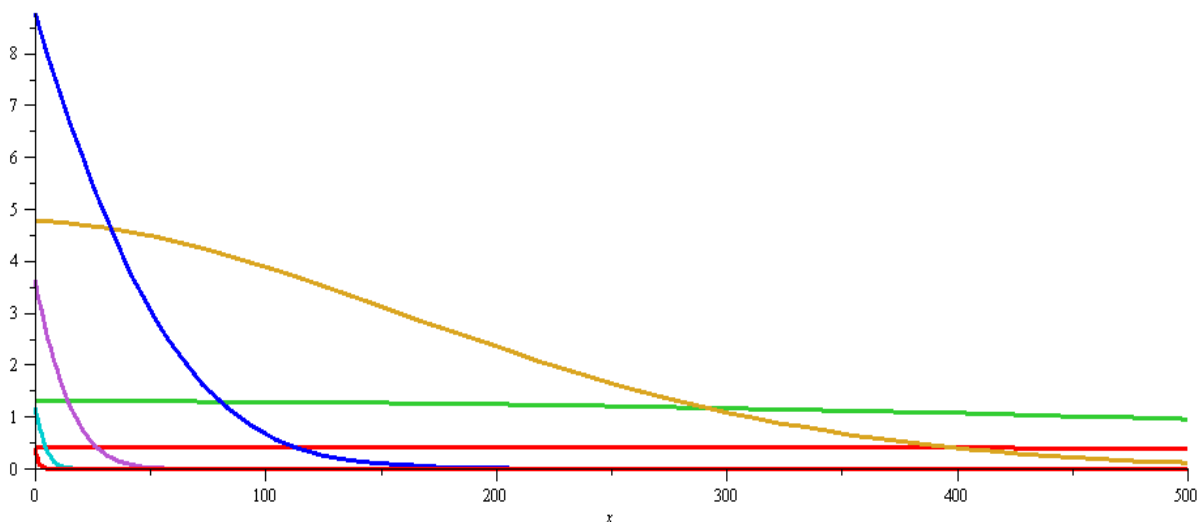


Abb. 11 Temperaturein K bis Abstand  $x < 500 \text{ m}$ ,  
Zeit  $t = 10^6 \text{ s}, 10^7 \text{ s}, 10^8 \text{ s}, 10^9 \text{ s}, 10^{10} \text{ s}, 10^{11} \text{ s}, 10^{12} \text{ s} = 31688 \text{ Jahre}$

Die frei gesetzte Wärme bewirkt einen Temperaturanstieg bis nach ca.  $10^9 \text{ s} = 31,7 \text{ Jahren}$  der Wärmeeintrag in der Heizebene zu gering ist um die Wärmediffusion zu kompensieren. Die Temperatur fällt wieder und nach  $10^{12} \text{ s} = 31688 \text{ Jahren}$  ist die Wärme gleichmäßig verteilt und die Temperatur überall weniger als 0,5 K höher als zu Beginn.