Integralverfahren zur Erstellung der Temperaturfunktionen um einen kugelförmigen Behälter mit WAA

Gerhard Herres, 2026-08-26, 2026-09-11

In ein horizontales Bohrloch werden Behälter mit radioaktivem Müll aus einer Wiederaufbereitungsanlage, WAA genannt, geschoben. Jeder Behälter enthält 400 kg in Glas eingeschmolzene radioaktive Stoffe in einer Strahlenschutzhülle aus Edelstahl und gibt zu Beginn eine Wärmeleistung Q0 =1125 W ab. Da die Wärmeabgabe auf Grund des radioaktiven Zerfalls mit einer exponentiellen Zerfallsrate von b = 7,3125*10^-10 pro Sekunde abnimmt, klingt die Wärmeabgabe langsam ab. Nach dem Lehrbuch Wärme- und Stoffübertragung von Hans-Dieter Baehr und Karl Stephan kann man für eine Punktquelle eine Temperaturfunktion in Abhängigkeit von Abstand r und Zeit t angeben.
Mit einer mittlern Dichte von 2,2 kg/dm³ benötigen die 400 kg ein Volumen

> $Volumen := \frac{400}{2.2}$; # dm3

$$Volumen := 181.8181818 \quad (1)$$

> $Radius := \sqrt[3]{\frac{Volumen}{\frac{4\cdot\pi}{3}}}$;

$$Radius := 1.416290837\ 3^{1/3}\ 4^{2/3}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/3} \quad (2)$$

> $Radius := evalf(\%)$; # dm3

$$Radius := 3.514386863 \quad (3)$$

> restart :

$$\text{theta}(r,t) := \frac{1}{(4\cdot\pi\cdot a)^{\frac{3}{2}}\cdot cp\cdot \text{rho}} \cdot Int\left(Q(\tau)\cdot(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4\cdot a\cdot(t-\tau)}\right), d\tau = 0..t\right);$$

$$\theta := (r,t) \to \frac{1}{16}\ \frac{\sqrt{4}\left(\int_0^t \frac{Q(\tau)\ e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\,dd\tau\right)}{(\pi\,a)^{3/2}\,cp\,\rho} \quad (4)$$

Mit Q(τ)=Q0*exp(-b*τ) wird die exponentiell abnehmende Wärmeabgabe eingesetzt.

```
> theta(r, t) := 1/(4·π·a)^(3/2) · cp·rho · Int( Q0·exp(-b·τ)·(t-τ)^(-(3/2))·exp(-r^2/(4·a·(t-τ))), dτ=0..t );
```

$$\theta := (r, t) \to \frac{1}{16} \frac{\sqrt{4}\left(\int_0^t \frac{Q0\, e^{-b\tau} e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} \, d\,d\tau \right)}{(\pi a)^{3/2} cp\, \rho} \tag{5}$$

Eine Substitution u = t - τ --> du = -dτ vereinfacht das Integral.

```
> theta(r, t) := -1/(4·π·a)^(3/2) · cp·rho · Int( Q0·exp(-b·(t-u))·(u)^(-3/2)·exp(-r^2/(4·a·(u))), du=t..0 );
```

$$\theta := (r, t) \to -\frac{1}{16} \frac{\sqrt{4}\left(Int\left(\frac{Q0\, e^{-b(t-u)} e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a u}}}{u^{3/2}}, d\,u = t..0 \right) \right)}{(\pi a)^{3/2} cp\, \rho} \tag{6}$$

Aus diesem Integral läßt sich der konstante Anteil Q0 * exp(-b * t) heraus ziehen.
Die Integrationsgrenzen werden vertauscht.

```
> theta(r, t) := -Q0·exp(-b·t)/(4·π·a)^(3/2) · cp·rho · Int( exp(b·u)·(u)^(-3/2)·exp(-r^2/(4·a·(u))), du=t..0 );
```

$$\theta := (r, t) \to -\frac{1}{16} \frac{Q0\, e^{-bt} \sqrt{4}\left(Int\left(\frac{e^{bu} e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a u}}}{u^{3/2}}, d\,u = t..0 \right) \right)}{(\pi a)^{3/2} cp\, \rho} \tag{7}$$

Leider gibt es für dieses Integral keine geschlossene Lösung. Für konstante Wärmeleistung gibt es zwar als Lösung das Exponentialintegral, welches hier aber nicht zutrifft. Folglich kann man nur mit einer numerischen Integration die Funktionen erhalten.

```
> Q0 := 1125; # W
```

$$Q0 := 1125 \tag{8}$$

```
> #   Radius:=0.3514386863 # m   Radius einer Einheit = 1 WAA Behälter
```

```
> b := 7.3125e-10; # 1/Sekunde Zerfallsrate
```

$$b := 7.3125\ 10^{-10} \tag{9}$$

Die Stoffdaten von Tonstein dürften ähnlich sein wie die von Ton.

Aus dem Lehrbuch von Baehr/Stephan stammen die folgenden Daten

> rho := 1450; cp := 880; # *Dichte in* $\frac{kg}{m3}$, *spezifische Wärmekapazität* **in** $\frac{J}{(kg \cdot K)}$

$$\rho := 1450$$

$$cp := 880 \quad (10)$$

> lambda := 1.28; $a := \frac{\text{lambda}}{\text{rho} \cdot cp}$; # *lambda in* $\frac{W}{(m \cdot K)}$, a **in** $\frac{m^2}{s}$

$$\lambda := 1.28$$

$$a := 0.000001003134796 \quad (11)$$

> *with*(*plots*) :

Der Integrand lautet:

> $ft := \exp(b \cdot \tau) \cdot (\tau)^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (\tau)}\right)$;

$$ft := \frac{e^{7.3125\,10^{-10}\tau}\, e^{-\frac{2.492187500\,10^5 r^2}{\tau}}}{\tau^{3/2}} \quad (12)$$

Mit dem Vorfaktor $\frac{Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)}{(4 \cdot \pi \cdot a)^{\frac{3}{2}} \cdot cp \cdot \text{rho}}$

$$\frac{54845.74271\, e^{-7.3125\,10^{-10} t} \sqrt{4}}{\pi^{3/2}} \quad (13)$$

> $ftg := \frac{Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)}{(4 \cdot \pi \cdot a)^{\frac{3}{2}} \cdot cp \cdot \text{rho}} \cdot ft$;

$$ftg := \frac{54845.74271\, e^{-7.3125\,10^{-10} t}\, e^{7.3125\,10^{-10}\tau}\, e^{-\frac{2.492187500\,10^5 r^2}{\tau}} \sqrt{4}}{\tau^{3/2}\, \pi^{3/2}} \quad (14)$$

>

▶ Darstellung des Integranden

▼ Numerische Integration

Die Integration wird über jeweils eine 8tel Dekade der Zeit t durchgeführt, da dann vom Programm die Schrittweite jeweils passend gewählt werden kann.

> *ftg*

$$\frac{54845.74271\, e^{-7.3125\,10^{-10} t}\, e^{7.3125\,10^{-10}\tau}\, e^{-\frac{2.492187500\,10^5 r^2}{\tau}} \sqrt{4}}{\tau^{3/2}\, \pi^{3/2}} \quad (2.1)$$

```
> Ft := Int( ftg, τ = 0 .. t, numeric = true );
```

$$Ft := Int\left(\frac{54845.74271\, e^{-7.3125\,10^{-10} t}\, e^{7.3125\,10^{-10}\tau}\, e^{-\frac{2.492187500\,10^{5} r^{2}}{\tau}} \sqrt{4}}{\tau^{3/2}\, \pi^{3/2}}, \tau = 0 \,..t, numeric = true \right) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Die räumliche Auflösung beträgt ein 8tel Dekade, beginnend mit R = 0.1 m. Der nächste Radius ist dann jeweils um den Faktor 10^(1/8) = 1,33352 größer. So kann sowohl der Bereich nahe an der Punktquelle, als auch fern davon mit geringem Aufwand berechnet werden.

```
> Digits := 10 :
> ListR := [ ]:
  for NR from 1 to 31 do
    R := 0.1·10^((NR − 1)/8) : ListR := [op(ListR), R] : # Liste der Radien
    for N from 1 to 88 do
      Fti := 0 :                  # Summe der Integralbeiträge auf 0 setzen.
      ftr := subs(r = R, ft) : # Integrand für den Radius r = R
      ListT := [ ]:   # Liste der Zeitpunkte initialisieren.
      Tg := 10^(N/8) :     # Tg ist der Zeitpunkt bis zu dem integriert wird.
      for k from 1 to N do
        T1 := 10^((k − 1)/8) : T2 := 10^(k/8) :
        ListT := [op(ListT), T2] :  # Liste aller Zeitpunkte
        # T1 und T2 geben das Intervall der Integration an.
        Ft := evalf( subs( t = Tg, Q0·exp(−b·t)/(4·π·a)^(3/2)·cp·rho ) · int( ftr, τ = T1 ..T2, numeric
      = true) ) :
        # Ft sind die Beiträge zur Integration in den Zeitintervallen T1 bis T2
        Fti := Fti + Ft :
      # Fti ist das gesamte Integral bis zum Zeitpunkt Tg beim Radius R
      end do:
    Feld[NR, k − 1] := Fti :
  # print(NR, k − 1, Fti);
  # Zum Radius R = 0.1·10^(NR/8) gesammelte Temperaturwerte zu den
  # Zeitpunkten Tg= 10^(1/8) bis Tg = 10^(88/8)
    end do:
  end do:

> with( plots) :
> ListR
```

$$[0.1, 0.1\,10^{1/8}, 0.1\,10^{1/4}, 0.1\,10^{3/8}, 0.1\sqrt{10}, 0.1\,10^{5/8}, 0.1\,10^{3/4}, 0.1\,10^{7/8}, 1.0, 1.0\,10^{1/8}, 1.0\,10^{1/4}, 1.0\,10^{3/8}, 1.0\sqrt{10}, 1.0\,10^{5/8}, 1.0\,10^{3/4}, 1.0\,10^{7/8}, 10.0, 10.0\,10^{1/8}, 10.0\,10^{1/4}, 10.0\,10^{3/8}, 10.0\sqrt{10}, 10.0\,10^{5/8}, 10.0\,10^{3/4}, 10.0\,10^{7/8}, 100.0, 100.0\,10^{1/8}, 100.0\,10^{1/4}, 100.0\,10^{3/8}, 100.0\sqrt{10}, 100.0\,10^{5/8}, 100.0\,10^{3/4}] \quad (15)$$

```
> ListT
```

$$[10^{1/8}, 10^{1/4}, 10^{3/8}, \sqrt{10}, 10^{5/8}, 10^{3/4}, 10^{7/8}, 10, 10\,10^{1/8}, 10\,10^{1/4}, 10\,10^{3/8}, 10\sqrt{10}, 10\,10^{5/8}, 10\,10^{3/4}, 10\,10^{7/8}, 100, 100\,10^{1/8}, 100\,10^{1/4}, 100\,10^{3/8}, 100\sqrt{10}, 100\,10^{5/8}, 100\,10^{3/4}, 100\,10^{7/8}, 1000, 1000\,10^{1/8}, 1000\,10^{1/4}, 1000\,10^{3/8}, 1000\sqrt{10}, 1000\,10^{5/8}, 1000\,10^{3/4}, 1000\,10^{7/8}, 10000, 10000\,10^{1/8}, 10000\,10^{1/4}, 10000\,10^{3/8}, 10000\sqrt{10}, 10000\,10^{5/8}, 10000\,10^{3/4}, 10000\,10^{7/8}, 100000, 100000\,10^{1/8}, 100000\,10^{1/4}, 100000\,10^{3/8}, 100000\sqrt{10}, 100000\,10^{5/8}, 100000\,10^{3/4}, 100000\,10^{7/8}, 1000000, 1000000\,10^{1/8}, 1000000\,10^{1/4}, 1000000\,10^{3/8}, 1000000\sqrt{10}, 1000000\,10^{5/8}, 1000000\,10^{3/4}, 1000000\,10^{7/8}, 10000000, 10000000\,10^{1/8}, 10000000\,10^{1/4}, 10000000\,10^{3/8}, 10000000\sqrt{10}, 10000000\,10^{5/8}, 10000000\,10^{3/4}, 10000000\,10^{7/8}, 100000000, 100000000\,10^{1/8}, 100000000\,10^{1/4}, 100000000\,10^{3/8}, 100000000\sqrt{10}, 100000000\,10^{5/8}, 100000000\,10^{3/4}, 100000000\,10^{7/8}, 1000000000, 1000000000\,10^{1/8}, 1000000000\,10^{1/4}, 1000000000\,10^{3/8}, 1000000000\sqrt{10}, 1000000000\,10^{5/8}, 1000000000\,10^{3/4}, 1000000000\,10^{7/8}, 10000000000, 10000000000\,10^{1/8}, 10000000000\,10^{1/4}, 10000000000\,10^{3/8}, 10000000000\sqrt{10}, 10000000000\,10^{5/8}, 10000000000\,10^{3/4}, 10000000000\,10^{7/8}, 100000000000] \quad (16)$$

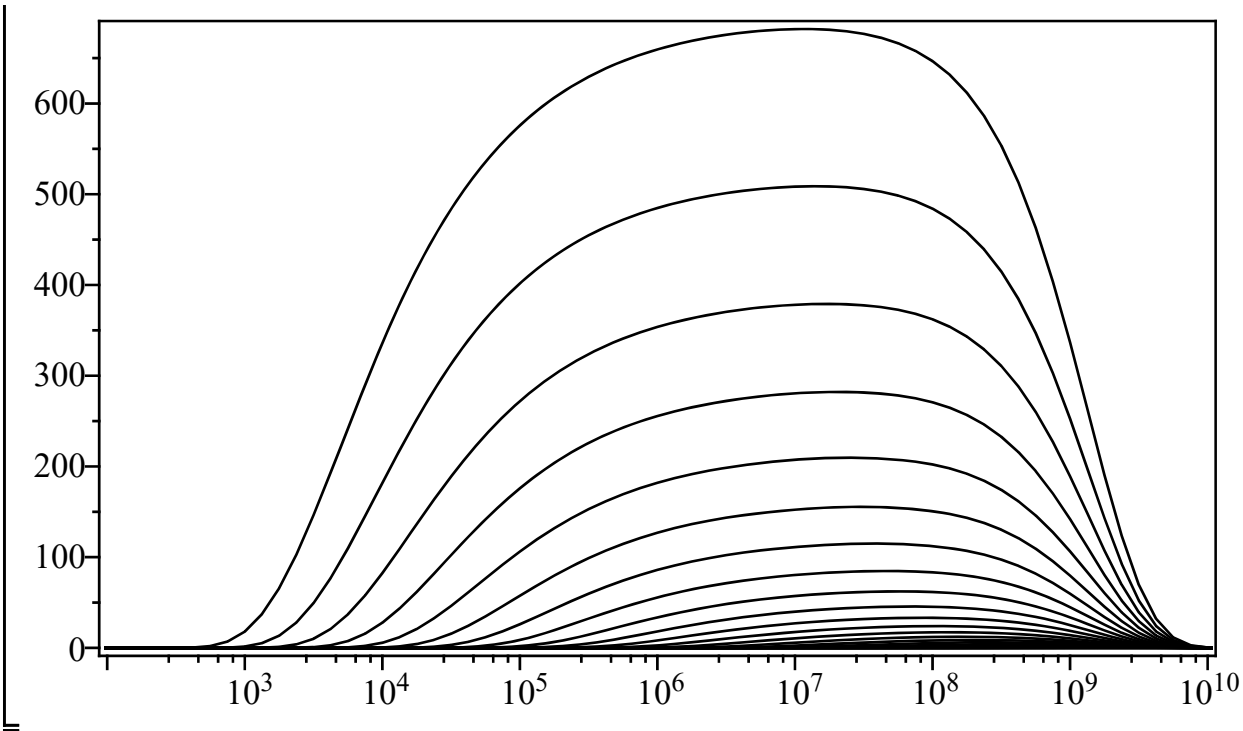
```
> nops(ListR); nops(ListT);
```

$$31$$
$$88 \quad (17)$$

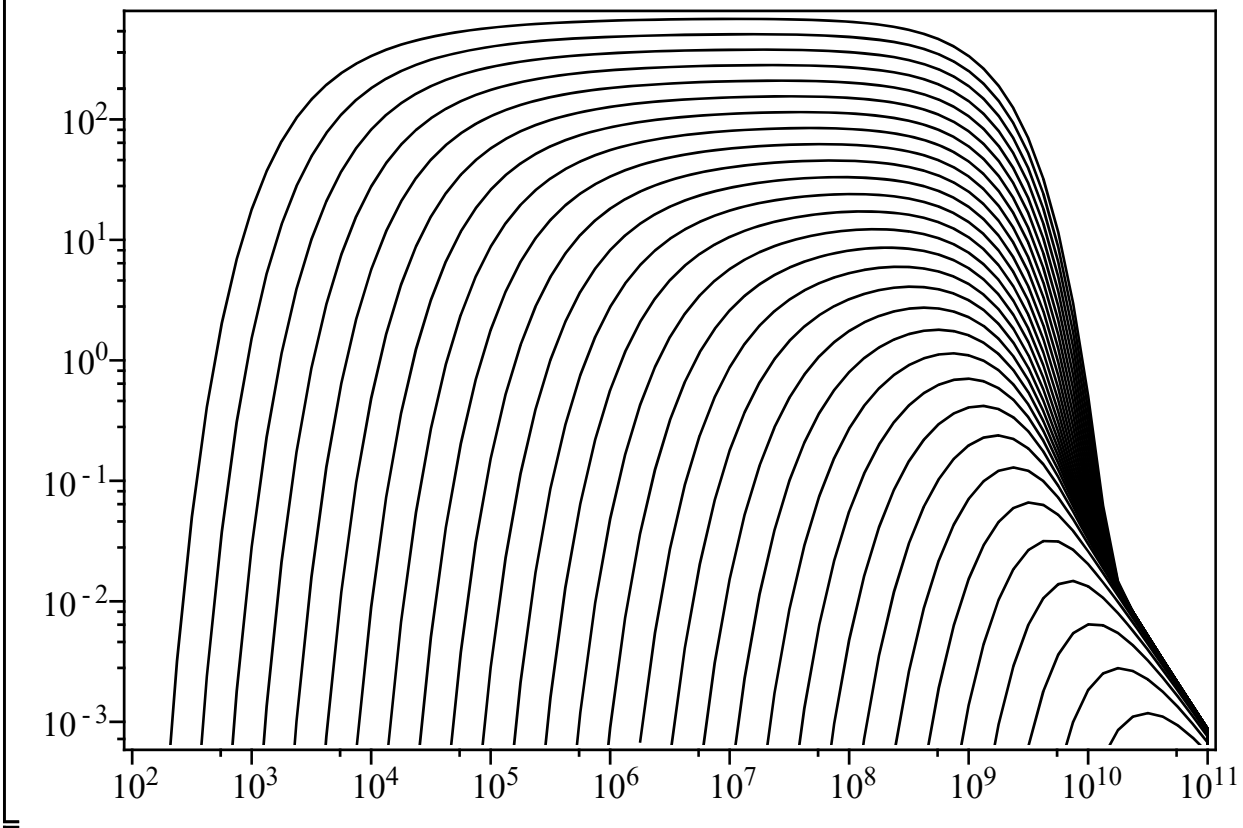
```
> for NR from 1 to 31 do   # Radien von 0,1 m bis  R=562,3 m
    plotfeld[NR] := [ ]:
    for k from 1 to 88 do  # Zeit von t=1,33 s bis 1e11 s =3168 Jahre
      plotfeld[NR] := [op(plotfeld[NR]), [ListT[k], Feld[NR, k]]]:
    end do:
  end do:
> plotfeld[1]:
> nops(plotfeld[1]);
```

$$88 \quad (18)$$

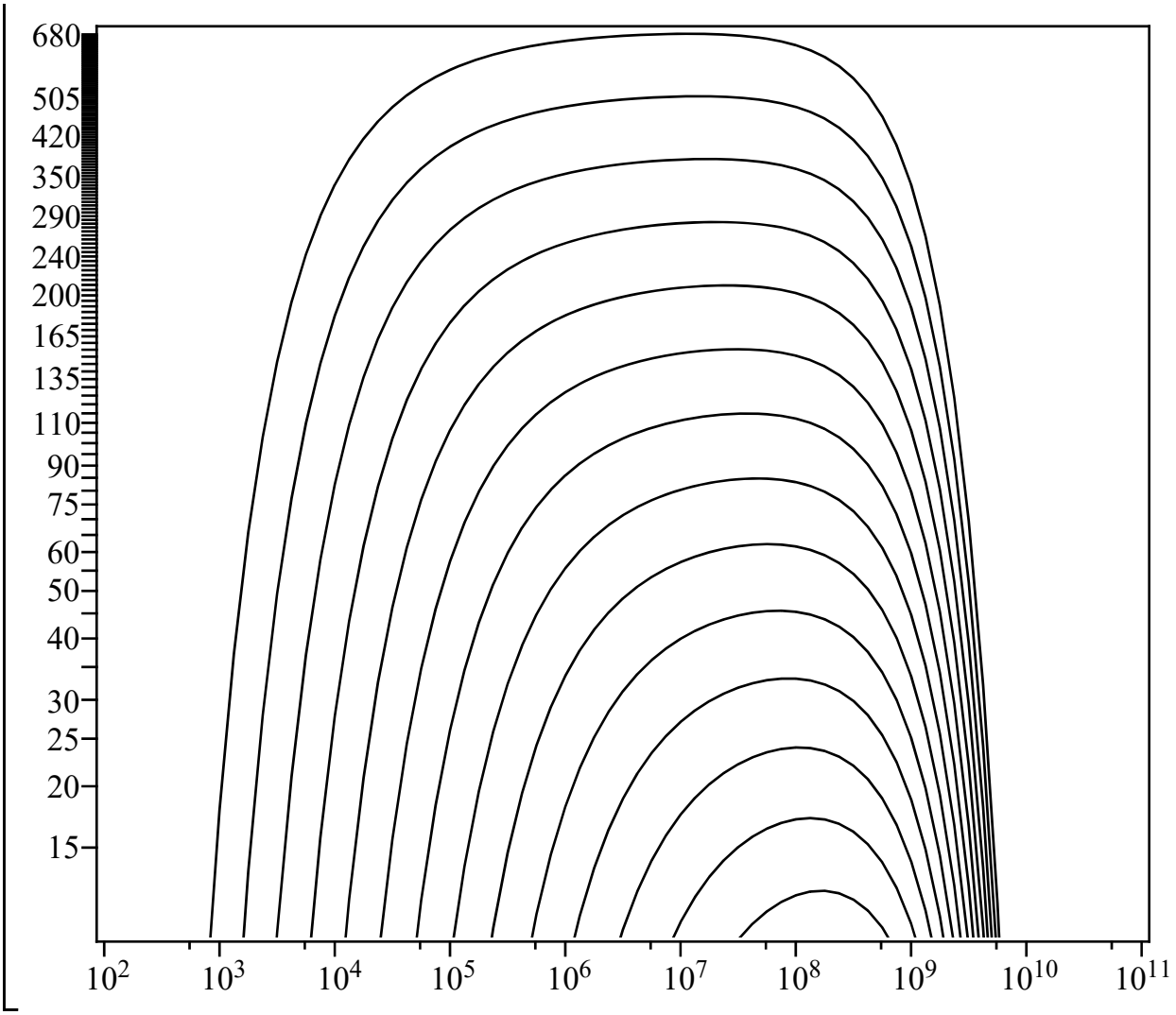
```
> G := [ ]:
  for NR from 1 to 31 by 1 do  # Radien von 0,1 m bis  R=562,3 m
  G := [op(G), op(plotfeld[NR]), [1e11, 0.000001], [1, 0.000001]]:
  end do:
> listplot(G);
```




```
> listplot(G);
```

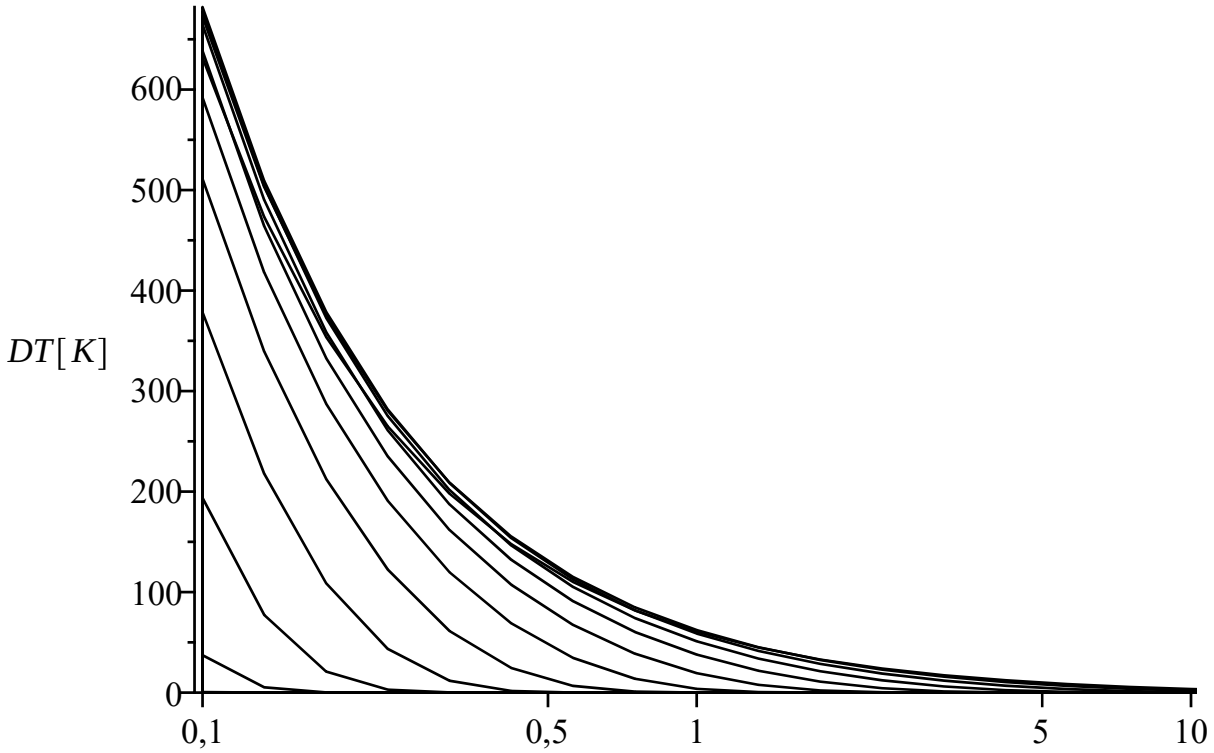



```
> listplot(G);
```



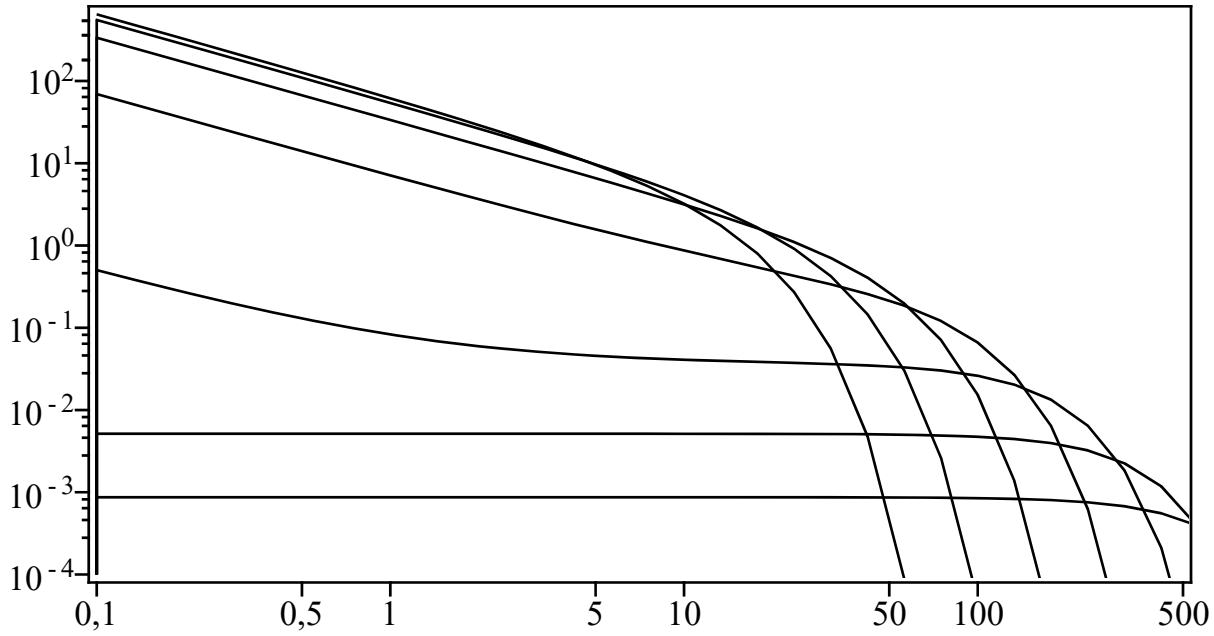
Es werden die Radien R=0,1 m (1.); 0,316 m(5.); 1 m(9.); 3,16 m(13.); 4.22 m(14.); dargestellt.
Die Temperatur im Tonstein steigt zuerst nahe an der Kugel R=0,1 m und erreicht nach ca.
1e7 Sekunden =0,3169 Jahren = 3,8 Monaten ein Maximum von etwa 682 K über dem Anfangswert.
In einem Abstand von mehr als R=0.75 m(8.) erreicht die Temperatur 85 K nach 1.45 Jahren,

```
> for k from 1 to 88 do   # Zeit von t=1,33 s bis 1e11 s =3168 Jahre
    plotfeldR[k] := [ ]:
    for NR from 1 to 31 do   # Radien von 0,1 m bis  R=562,3 m
      plotfeldR[k] := [op(plotfeldR[k]), [ListR[NR], Feld[NR, k]]]:
    end do:
  end do:
> H1 := [ ]:
  for k from 21 to 65 by 4 do    # Zeit von t=421 s bis 1e8 s =3,168 Jahre
  H1 := [op(H1), op(plotfeldR[k]), [ ListR[31], 0], [0.1, 0]]:
  end do:
 H2 := [ ]:
  for k from 64 to 88 by 4 do    # Zeit von t=1e8 s= 3,168 Jahre  bis 1e11 s =3168 Jahre
  H2 := [op(H2), op(plotfeldR[k]), [ ListR[31], 0], [0.1, 0]]:
  end do:
> listplot(H1);
```



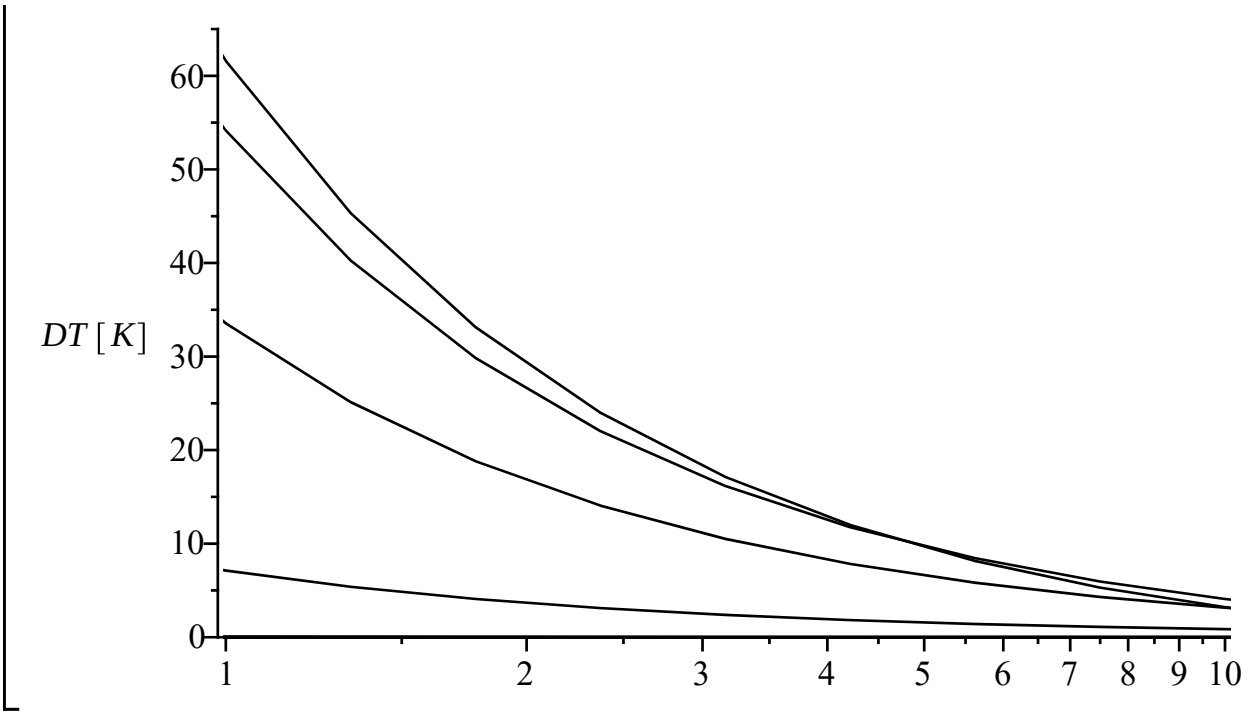
Die 11 Linen gelten für Zeitpunkte 31,6 s, 100 s, 316 s; 1000 s, usw. bis 3,16e6 s = 0,1 Jahre.
Die Temperatur steigt anfangs nur langsam, wie an dem oberen Bild zu sehen ist. Sie erreicht nach 3,16 e6 s nahe an der Linienquelle den höchsten Wert von 17,7 K.

```
> listplot(H2);
```



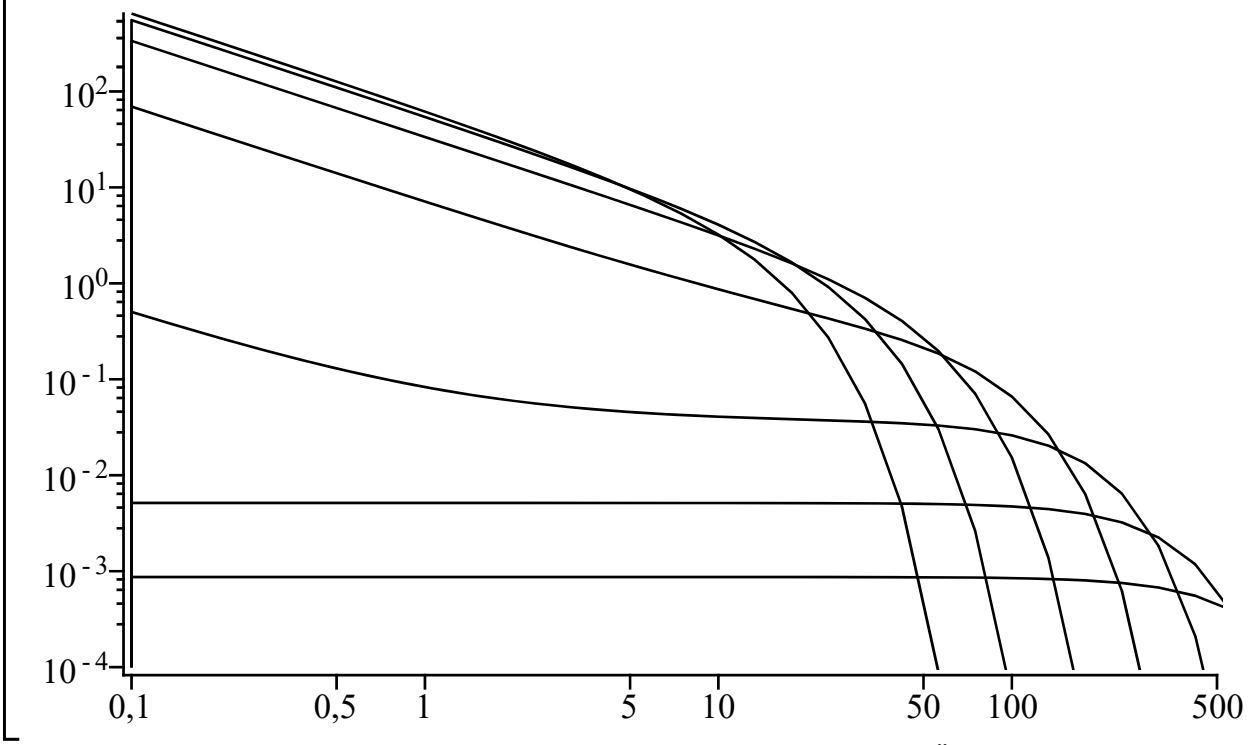
Die 7 Linen gelten für Zeitpunkte von 1e8 s = 3,169 Jahre, 3,16e8 s = 10 Jahre, u.s.w. bis 1e11 s= 3169 Jahre. Die Temperatur fällt nur langsam, wie an dem oberen Bild zu sehen ist.
Sie erreicht nach 1e11 s=3169 Jahren nahe an der Linienquelle den höchsten Wert von 0,000023 K.

```
> listplot(H2);
```



Die 7 Linen gelten für Zeitpunkte von 1e8 s = 3, 169 Jahre, 3, 16e8 s = 10 Jahre, u.s.w. bis 1e11 s = 3169 Jahre. Liegen die Bohrungen näher zusammen, dann addieren sich die Temperaturerhöhungen. In 10 m Abstand von der horizontalen Bohrung beträgt die maximale Temperaturerhöhung etwa 4 K, **in** 5 m Abstand 5.1 K.

```
> listplot(H2);
```



Da die Behälter in einem Abstand von 10 m liegen, ergibt sich durch die Überlagerung der Temperaturfelder in der Mitte zwischen zwei Behältern eine Temperaturerhöhung von etwa 2 · 8.2 K = 16.4 K

Die gesamte Wärme, die abgegeben wird, ergibt sich aus dem Integral

Qges = Int(Q0*exp(-b*t), dt=0..infinity)
Diese Wärme verteilt sich nach 1e11 s = 3169 Jahren auf ein
Volumen von mehr als $V = \frac{4}{3} \cdot pi \cdot R^3$.

> $Qges := int(Q0 \cdot \exp(-b \cdot t), t = 0..infinity);$ # Joule

$$Qges := 1.538461538\ 10^{12} \quad \textbf{(19)}$$

> $Volumen := \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot 650 \cdot 650 \cdot 650;$

$$Volumen := \frac{1098500000}{3}\ \pi \quad \textbf{(20)}$$

> $Volumen := evalf(\%);$

$$Volumen := 1.150346510\ 10^{9} \quad \textbf{(21)}$$

> $DTges := \frac{Qges}{(Volumen \cdot cp \cdot \mathrm{rho})};$

$$DTges := 0.001048111026 \quad \textbf{(22)}$$

>

Das passt von der Größe gut zur Integration der Funktion, da die Wärme ja nicht nur bis zum Radius R=650m vorgedrungen ist.