Integration der Temperatur um eine Linienquelle

Gerhard Herres, 2026-06-25, 2026-08-28, 2026-09-13

In ein horizontales Bohrloch werden Behälter mit radioaktivem Müll aus einer Wiederaufbereitungsanlage, WAA genannt, geschoben. Jeder CSD-V Behälter ist 0,596 m dick und 1,94 m lang und befindet sich in einer 83 mm dünnen Hülle. Zu Beginn gibt jeder Behälter eine Wärmeleistung Q0 = 1125 W ab.
Da die Wärmeabgabe auf Grund des radioaktiven Zerfalls mit einer exponentiellen Zerfallsrate von b = 7,3125*10^-10 pro Sekunde abnimmt, klingt die Wärmeabgabe langsam ab. Nach dem Lehrbuch Wärme- und Stoffübertragung von Baehr und Stephan kann man für eine Linienquelle eine Temperaturfunktion in Abhängigkeit von Abstand r und Zeit t angeben.

```
> restart :
  theta(r, t) := 1/(4·π·λ·L) · Int( Q(τ) ·(t − τ)^-1 ·exp( − r^2/(4·a·(t − τ)) ), dτ = 0..t );
```

$$\theta := (r, t) \to \frac{1}{4} \frac{\int_0^t \frac{Q(\tau)\, e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,(t-\tau)}}}{t-\tau}\, d\,d\tau}{\pi\,\lambda\,L} \tag{1}$$

Mit Q(τ)=Q0*exp(-b*τ) wird die exponentiell abnehmende Wärmeabgabe eingesetzt.
Eine Substitution u = t - τ --> du = -dτ vereinfacht das Integral.

```
> theta(r, t) := -1/(4·π·λ·L) · Int( Q0·exp( -b·(t − u) ) ·(u)^-1 ·exp( − r^2/(4·a·(u)) ), du = t..0 );
```

$$\theta := (r, t) \to -\frac{1}{4} \frac{Int\left(\frac{Q0\, e^{-b\,(t-u)}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,u}}}{u}, d\,u = t..0 \right)}{\pi\,\lambda\,L} \tag{2}$$

Aus diesem Integral läßt sich der konstante Anteil Q0 * exp(-b * t) heraus ziehen.
Die Integrationsgrenzen werden vertauscht.

```
> theta(r, t) := Q0·exp( -b·(t) )/(4·π·λ·L) · Int( exp(b·u) ·(u)^-1 ·exp( − r^2/(4·a·(u)) ), du = 0..t );
```

$$\theta := (r, t) \to \frac{1}{4} \frac{Q0\, e^{-b\,t} \left(Int\left(\frac{e^{b\,u}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,u}}}{u}, d\,u = 0..t \right) \right)}{\pi\,\lambda\,L} \tag{3}$$

Leider gibt es für dieses Integral keine geschlossene Lösung. Für konstante Wärmeleistung gibt es zwar als Lösung das Exponentialintegral, welches hier aber nicht zutrifft. Folglich kann man nur mit einer numerischen Integration die Funktionen erhalten.

```
> Q0 := 1125; # W
```

$$Q0 := 1125 \tag{4}$$

> $L := 1.94 \# m$ *Länge einer Einheit = 1 WAA Behälter*

$$L := 1.94 \quad \textbf{(5)}$$

> $b := 7.3125e-10; \# \frac{1}{Sekunde}$ *Zerfallsrate*

$$b := 7.3125\ 10^{-10} \quad \textbf{(6)}$$

Die Stoffdaten von Tonstein dürften ähnlich sein wie die von Ton.
Aus dem Lehrbuch von Baehr/Stephan stammen die folgenden Daten

> rho := 1450; *cp* := 880; # *Dichte in* $\frac{kg}{m3}$, *spezifische Wärmekapazität* **in** $\frac{J}{(kg \cdot K)}$

$$\rho := 1450$$

$$cp := 880 \quad \textbf{(7)}$$

> lambda := 1.28; $a := \frac{\text{lambda}}{\text{rho} \cdot cp}$; # *lambda in* $\frac{W}{(m \cdot K)}$, *a* **in** $\frac{m^2}{s}$

$$\lambda := 1.28$$

$$a := 0.000001003134796 \quad \textbf{(8)}$$

> *with*(*plots*) :

Der Integrand lautet:

> $ft := \exp(b \cdot \tau) \cdot (\tau)^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (\tau)}\right)$;

$$ft := \frac{e^{7.3125\ 10^{-10} \tau}\, e^{-\frac{2.492187500\ 10^5\, r^2}{\tau}}}{\tau} \quad \textbf{(9)}$$

Mit dem Vorfaktor $\frac{Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)}{\pi \cdot 4 \cdot \text{lambda} \cdot L}$

> $ftg := \frac{Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)}{\pi \cdot 4 \cdot \text{lambda} \cdot L} \cdot ft$;

$$ftg := \frac{113.2611147\ e^{-7.3125\ 10^{-10} t}\, e^{7.3125\ 10^{-10} \tau}\, e^{-\frac{2.492187500\ 10^5\, r^2}{\tau}}}{\tau\, \pi} \quad \textbf{(10)}$$

>

▶ Darstellung des Integranden

▼ Numerische Integration

Die Integration wird über jeweils eine 8tel Dekade der Zeit t durchgeführt, da dann vom Programm die Schrittweite jeweils passend gewählt werden kann.

> *ftg*

$$\frac{113.2611147\ e^{-7.3125\ 10^{-10} t}\, e^{7.3125\ 10^{-10} \tau}\, e^{-\frac{2.492187500\ 10^5\, r^2}{\tau}}}{\tau\, \pi} \quad \textbf{(2.1)}$$

```
> Ft := Int( ftg, τ = 0 .. t, numeric = true);
```

$$Ft := Int\left(\frac{113.2611147\, e^{-7.3125\,10^{-10} t}\, e^{7.3125\,10^{-10}\tau}\, e^{-\frac{2.492187500\,10^{5} r^{2}}{\tau}}}{\tau\,\pi}, \tau = 0 \,..t, numeric = true \right) \quad \textbf{(2.2)}$$

Die räumliche Auflösung beträgt ein 8tel Dekade, beginnend mit R = 0.1 m. Der nächste Radius ist dann jeweils um den Faktor 10^(1/8) = 1,33352 größer. So kann sowohl der Bereich nahe an der Linienquelle, als auch fern davon mit geringem Aufwand berechnet werden.

```
> Digits := 10 :
> ListR := [ ]:
  for NR from 1 to 31 do
    R := 0.3·10^((NR − 1)/8) : ListR := [op(ListR), R] : # Liste der Radien
    for N from 1 to 88 do
      Fti := 0 :                # Summe der Integralbeiträge auf 0 setzen.
      ftr := subs(r = R, ft) : # Integrand für den Radius r = R
      ListT := [ ]:   # Liste der Zeitpunkte initialisieren.
      Tg := 10^(N/8) :    # Tg ist der Zeitpunkt bis zu dem integriert wird.
      for k from 1 to N do
        T1 := 10^((k − 1)/8) : T2 := 10^(k/8) :
        ListT := [op(ListT), T2] : # Liste aller Zeitpunkte
        # T1 und T2 geben das Intervall der Integration an.
        Ft := evalf( subs( t = Tg, Q0·exp(−b·t)/(π·4·lambda·L) )·int(ftr, τ = T1 ..T2, numeric = true) ) :
       # Ft sind die Beiträge zur Integration in den Zeitintervallen T1 bis T2
        Fti := Fti + Ft :
       # Fti ist das gesamte Integral bis zum Zeitpunkt Tg beim Radius R
       end do:
      Feld[NR, k − 1] := Fti :
     # print(NR, k − 1, Fti);
    # Zum Radius R = 0.1·10^(NR/8) gesammelte Temperaturwerte zu den
    # Zeitpunkten Tg= 10^(1/8) bis Tg = 10^(88/8)
     end do:
  end do:
```

```
> with(plots) :
> ListR
```

$$[0.3,\ 0.3\ 10^{1/8},\ 0.3\ 10^{1/4},\ 0.3\ 10^{3/8},\ 0.3\sqrt{10},\ 0.3\ 10^{5/8},\ 0.3\ 10^{3/4},\ 0.3\ 10^{7/8},\ 3.0,\ 3.0\ 10^{1/8},$$
$$3.0\ 10^{1/4},\ 3.0\ 10^{3/8},\ 3.0\sqrt{10},\ 3.0\ 10^{5/8},\ 3.0\ 10^{3/4},\ 3.0\ 10^{7/8},\ 30.0,\ 30.0\ 10^{1/8},\ 30.0\ 10^{1/4},$$
$$30.0\ 10^{3/8},\ 30.0\sqrt{10},\ 30.0\ 10^{5/8},\ 30.0\ 10^{3/4},\ 30.0\ 10^{7/8},\ 300.0,\ 300.0\ 10^{1/8},\ 300.0\ 10^{1/4}, \quad \textbf{(11)}$$

$300.0\ 10^{3/8}, 300.0\ \sqrt{10}, 300.0\ 10^{5/8}, 300.0\ 10^{3/4}]$

```
> ListT
```

$$[10^{1/8}, 10^{1/4}, 10^{3/8}, \sqrt{10}, 10^{5/8}, 10^{3/4}, 10^{7/8}, 10, 10\ 10^{1/8}, 10\ 10^{1/4}, 10\ 10^{3/8}, 10\ \sqrt{10}, 10\ 10^{5/8}, 10\ 10^{3/4}, 10\ 10^{7/8}, 100, 100\ 10^{1/8}, 100\ 10^{1/4}, 100\ 10^{3/8}, 100\ \sqrt{10}, 100\ 10^{5/8}, 100\ 10^{3/4}, 100\ 10^{7/8}, 1000, 1000\ 10^{1/8}, 1000\ 10^{1/4}, 1000\ 10^{3/8}, 1000\ \sqrt{10}, 1000\ 10^{5/8}, 1000\ 10^{3/4}, 1000\ 10^{7/8}, 10000, 10000\ 10^{1/8}, 10000\ 10^{1/4}, 10000\ 10^{3/8}, 10000\ \sqrt{10}, 10000\ 10^{5/8}, 10000\ 10^{3/4}, 10000\ 10^{7/8}, 100000, 100000\ 10^{1/8}, 100000\ 10^{1/4}, 100000\ 10^{3/8}, 100000\ \sqrt{10}, 100000\ 10^{5/8}, 100000\ 10^{3/4}, 100000\ 10^{7/8}, 1000000, 1000000\ 10^{1/8}, 1000000\ 10^{1/4}, 1000000\ 10^{3/8}, 1000000\ \sqrt{10}, 1000000\ 10^{5/8}, 1000000\ 10^{3/4}, 1000000\ 10^{7/8}, 10000000, 10000000\ 10^{1/8}, 10000000\ 10^{1/4}, 10000000\ 10^{3/8}, 10000000\ \sqrt{10}, 10000000\ 10^{5/8}, 10000000\ 10^{3/4}, 10000000\ 10^{7/8}, 100000000, 100000000\ 10^{1/8}, 100000000\ 10^{1/4}, 100000000\ 10^{3/8}, 100000000\ \sqrt{10}, 100000000\ 10^{5/8}, 100000000\ 10^{3/4}, 100000000\ 10^{7/8}, 1000000000, 1000000000\ 10^{1/8}, 1000000000\ 10^{1/4}, 1000000000\ 10^{3/8}, 1000000000\ \sqrt{10}, 1000000000\ 10^{5/8}, 1000000000\ 10^{3/4}, 1000000000\ 10^{7/8}, 10000000000, 10000000000\ 10^{1/8}, 10000000000\ 10^{1/4}, 10000000000\ 10^{3/8}, 10000000000\ \sqrt{10}, 10000000000\ 10^{5/8}, 10000000000\ 10^{3/4}, 10000000000\ 10^{7/8}, 100000000000] \quad (12)$$

```
> nops(ListR); nops(ListT);
```

$$31$$
$$88 \quad (13)$$

```
> for NR from 1 to 31 do   # Radien von 0,1 m bis  R=562,3 m
    plotfeld[NR] := [ ]:
    for k from 1 to 88 do  # Zeit von t=1,33 s bis 1e11 s =3168 Jahre
      plotfeld[NR] := [op(plotfeld[NR]), [ListT[k], Feld[NR, k]]]:
    end do:
  end do:
```

```
> plotfeld[1];
```

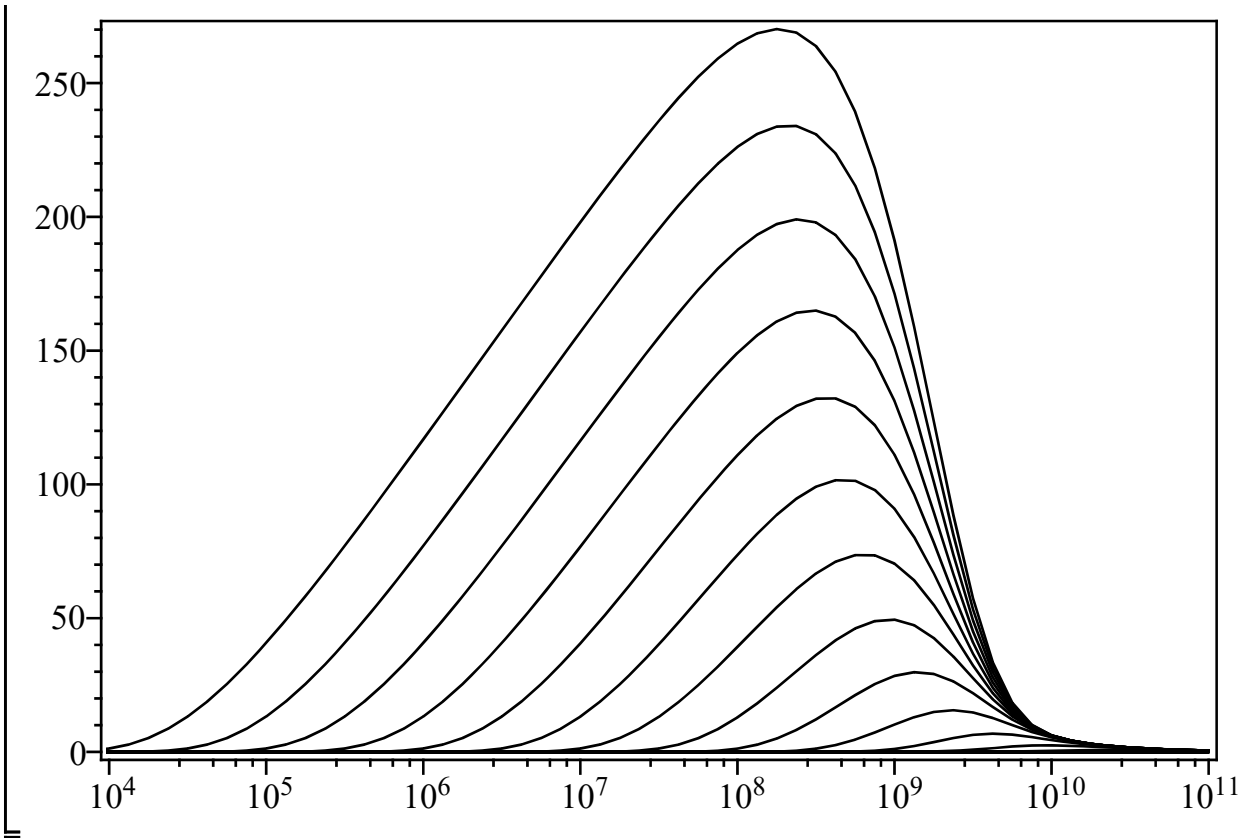
$$[[10^{1/8}, 0.], [10^{1/4}, 0.], [10^{3/8}, 0.], [\sqrt{10}, 0.], [10^{5/8}, 0.], [10^{3/4}, 0.], [10^{7/8}, 0.], [10, 0.], [10\ 10^{1/8}, 0.], [10\ 10^{1/4}, 0.], [10\ 10^{3/8}, 0.], [10\ \sqrt{10}, 4.625937633\ 10^{-310}], [10\ 10^{5/8}, 6.802337366\ 10^{-233}], [10\ 10^{3/4}, 5.385597160\ 10^{-175}], [10\ 10^{7/8}, 1.514072221\ 10^{-131}], [100, 6.212825444\ 10^{-99}], [100\ 10^{1/8}, 1.908456043\ 10^{-74}], [100\ 10^{1/4}, 4.726424584\ 10^{-56}], [100\ 10^{3/8}, 3.153210673\ 10^{-42}], [100\ \sqrt{10}, 7.871899228\ 10^{-32}], [100\ 10^{5/8}, 5.289294449\ 10^{-24}], [100\ 10^{3/4}, 4.199745920\ 10^{-18}], [100\ 10^{7/8}, 1.194819635\ 10^{-13}], [1000, 2.797748845\ 10^{-10}], [1000\ 10^{1/8}, 1.005732163\ 10^{-7}], [1000\ 10^{1/4}, 0.000008855941120], [1000\ 10^{3/8}, 0.0002710832894], [1000\ \sqrt{10}, 0.003749453372], [1000\ 10^{5/8}, 0.02851689342], [1000\ 10^{3/4}, 0.1381447968], [1000\ 10^{7/8}, 0.4758103203], [10000, 1.265179956], [10000\ 10^{1/8}, 2.762238246], [10000\ 10^{1/4}, 5.185947932], \quad (14)$$

$[10000\ 10^{3/8}, 8.668084910], [10000\ \sqrt{10}, 13.24013136], [10000\ 10^{5/8}, 18.84984886],$
$[10000\ 10^{3/4}, 25.39069503], [10000\ 10^{7/8}, 32.73057047], [100000, 40.73340956],$
$[100000\ 10^{1/8}, 49.27250055], [100000\ 10^{1/4}, 58.23704511], [100000\ 10^{3/8},$
$67.53413439], [100000\ \sqrt{10}, 77.08804783], [100000\ 10^{5/8}, 86.83823060],$
$[100000\ 10^{3/4}, 96.73679398], [100000\ 10^{7/8}, 106.7460009], [1000000, 116.8359502],$
$[1000000\ 10^{1/8}, 126.9825241], [1000000\ 10^{1/4}, 137.1655771], [1000000\ 10^{3/8},$
$147.3673028], [1000000\ \sqrt{10}, 157.5706847], [1000000\ 10^{5/8}, 167.7579219],$
$[1000000\ 10^{3/4}, 177.9087042], [1000000\ 10^{7/8}, 187.9981827], [10000000, 197.9944603],$
$[10000000\ 10^{1/8}, 207.8553765], [10000000\ 10^{1/4}, 217.5243149], [10000000\ 10^{3/8},$
$226.9247077], [10000000\ \sqrt{10}, 235.9528375], [10000000\ 10^{5/8}, 244.4685240],$
$[10000000\ 10^{3/4}, 252.2832847], [10000000\ 10^{7/8}, 259.1457386], [100000000,$
$264.7244548], [100000000\ 10^{1/8}, 268.5893905], [100000000\ 10^{1/4}, 270.1948715],$
$[100000000\ 10^{3/8}, 268.8701765], [100000000\ \sqrt{10}, 263.8287226], [100000000\ 10^{5/8},$
$254.2135851], [100000000\ 10^{3/4}, 239.2042840], [100000000\ 10^{7/8}, 218.2125161],$
$[1000000000, 191.1818038], [1000000000\ 10^{1/8}, 158.9597968], [1000000000\ 10^{1/4},$
$123.6158930], [1000000000\ 10^{3/8}, 88.44869339], [1000000000\ \sqrt{10}, 57.37574616],$
$[1000000000\ 10^{5/8}, 33.63402265], [1000000000\ 10^{3/4}, 18.35249653],$
$[1000000000\ 10^{7/8}, 10.12525852], [10000000000, 6.194068342], [10000000000\ 10^{1/8},$
$4.221342572], [10000000000\ 10^{1/4}, 3.031078846], [10000000000\ 10^{3/8}, 2.215987196],$
$[10000000000\ \sqrt{10}, 1.633246372], [10000000000\ 10^{5/8}, 1.209785031],$
$[10000000000\ 10^{3/4}, 0.8991696534], [10000000000\ 10^{7/8}, 0.6699059296],$
$[100000000000, 0.4999550752]]$

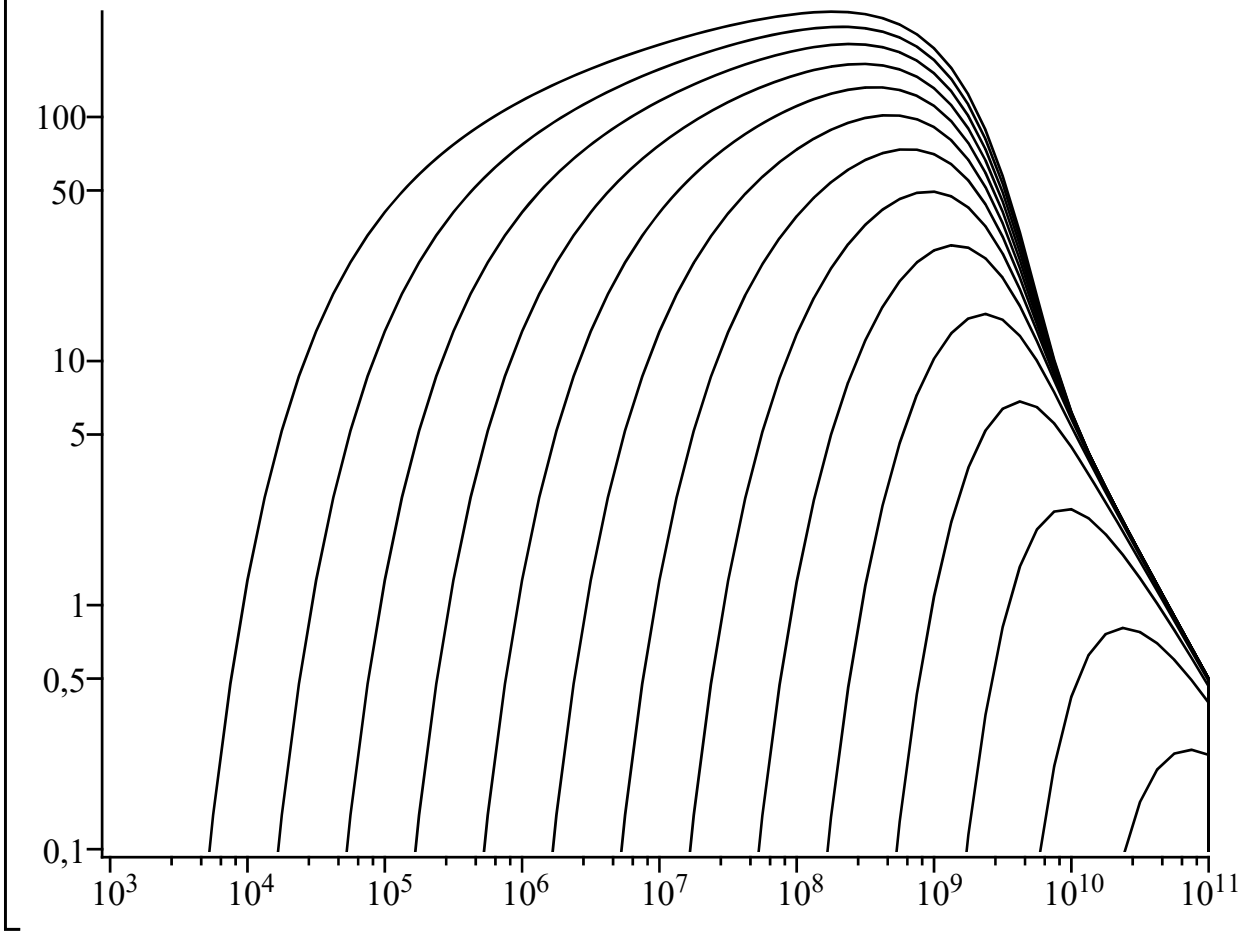
```
> nops(plotfeld[1]);
```

88 **(15)**

```
> G := [ ]:
  for NR from 1 to 31 by 2 do  # Radien von 0,1 m bis  R=562,3 m
  G := [op(G), op(plotfeld[NR]), [1e11, 0.000001], [1, 0.000001]]:
  end do:
> listplot(G);
```


250
200
150
100
50
0
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
10^{10}
10^{11}

> *listplot*(G);

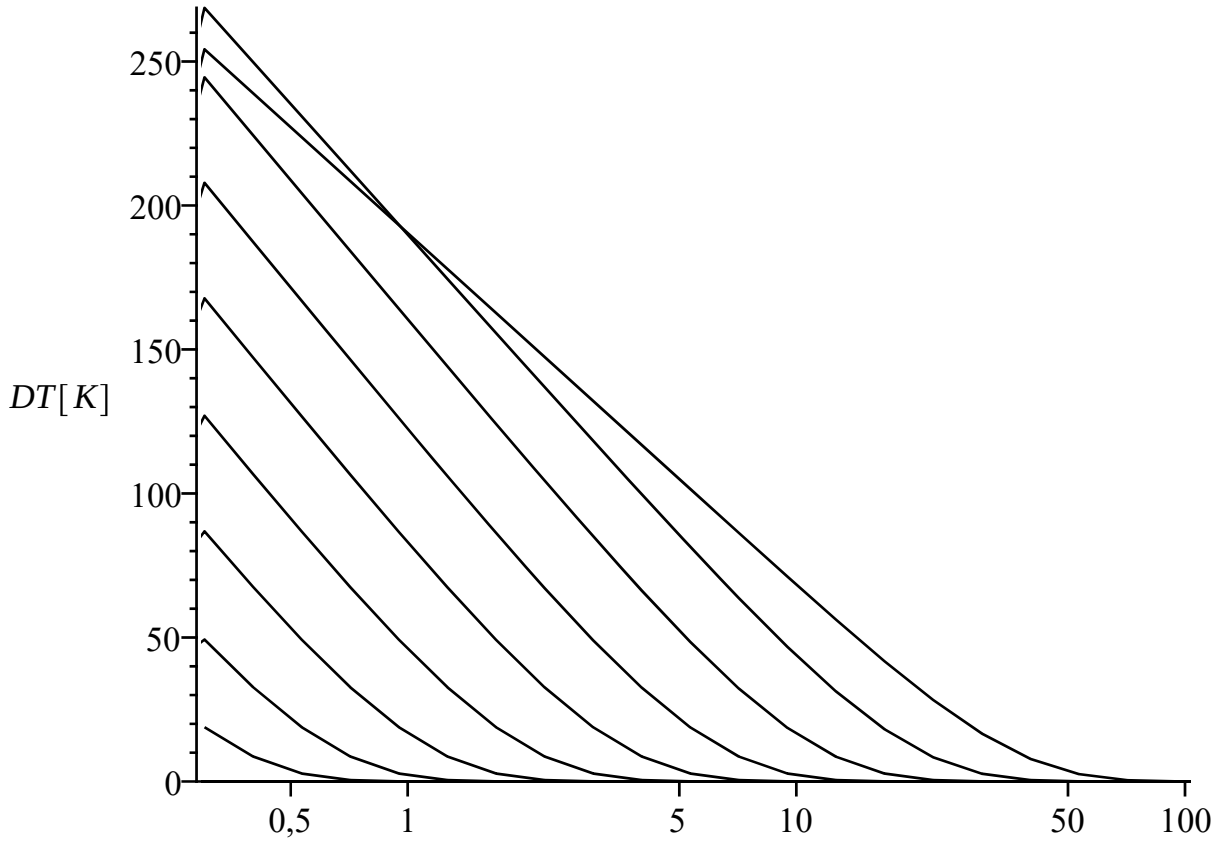

100
50
10
5
1
0,5
0,1
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
10^{10}
10^{11}

Es werden die Radien R=0.3 m; 0.533 m; 0.95 m;   1.69 m; 3 m;   5.33 m; usw. dargestellt.
Die Temperatur im Tonstein steigt zuerst nahe am Rohr R=0,3 m und erreicht nach ca.
1,7e8 Sekunden = 5,4 Jahren ein Maximum von etwa 270.19 K über dem Anfangswert.
In einem Abstand von mehr als R=300 m erreicht die Temperatur nicht einmal 1 K nach 630 Jahren.

```
> for k from 1 to 88 do   # Zeit von t=1,33 s bis 1e11 s =3168 Jahre
    plotfeldR[k] := [ ]:
    for NR from 1 to 31 do   # Radien von 0,1 m bis  R=562,3 m
      plotfeldR[k] := [op(plotfeldR[k]), [ListR[NR], Feld[NR, k]]]:
    end do:
  end do:
```

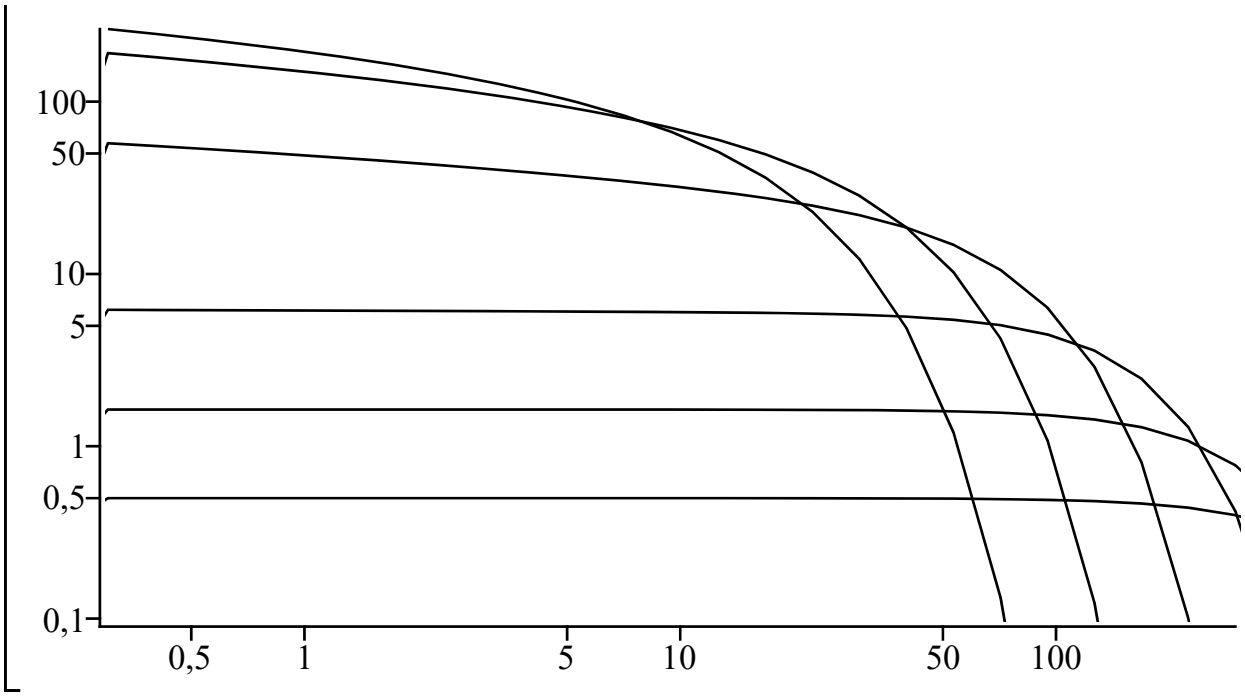
```
> H1 := [ ]:
  for k from 37 to 69 by 4 do   # Zeit von t=421 s bis 1e8 s =3,168 Jahre
  H1 := [op(H1), op(plotfeldR[k]), [ ListR[31], 0], [0.1, 0]]:
  end do:
  H2 := [ ]:
  for k from 68 to 88 by 4 do   # Zeit von t=1e8 s= 3,168 Jahre  bis 1e11 s =3168 Jahre
  H2 := [op(H2), op(plotfeldR[k]), [ ListR[31], 0], [0.1, 0]]:
  end do:
```

```
> listplot(H1);
```



Die 9 Linen gelten für Zeitpunkte 42.169 s= 11,7 h, 37 h, 117 h, 370 h, usw. bis 3.16e8 s =13.3 Jahre.
Die Temperatur steigt anfangs nur langsam, wie an dem oberen Bild zu sehen ist. Sie erreicht
nach etwa 1e8 s=4.2 Jahren nahe an der Linienquelle den höchsten Wert von 270 K.

```
> listplot(H2);
```



Die 6 Linen gelten für Zeitpunkte von 3,16e8 s =10 Jahre,1e9 s =31.69 Jahre, u.s.w. bis 1e11 s= 3169 Jahre. Die Temperatur fällt nur langsam, wie an dem oberen Bild zu sehen ist. Sie erreicht nach 1e11 s=3169 Jahren nahe an der Linienquelle den höchsten Wert von 0,5 K.

Liegen die Bohrungen näher zusammen, dann addieren sich die Temperaturerhöhungen . In 10 m Abstand von der horizontalen Bohrung beträgt die maximale Temperaturerhöhung etwa 65 K, in 5 m Abstand 97 K. Liegen die Bohrungen also 10 m auseinander, so ist in der Mitte die Temperaturerhöhung 2 * 97 K = 194 K.